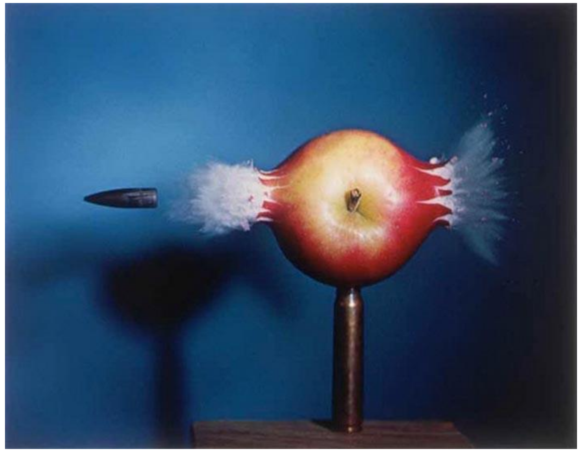
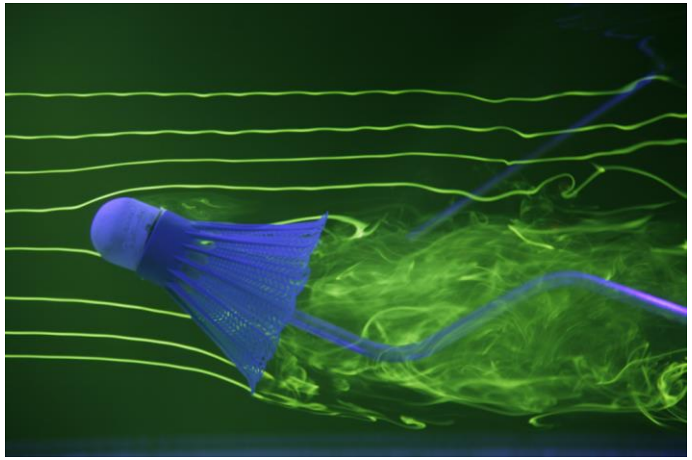
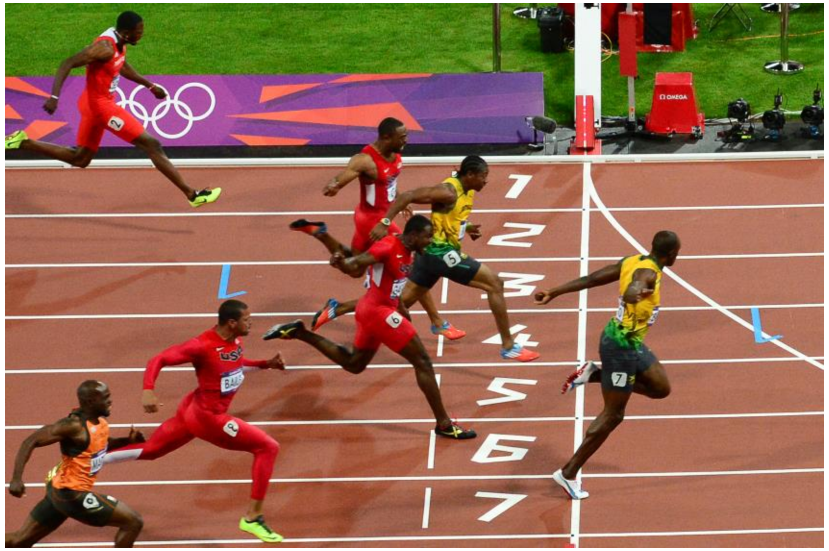
Cinématique des solides





Introduction à la cinématique des solides

Compétences attendues :

- ✓ Modéliser la cinématique d’un ensemble de solides.
- ✓ Caractériser le mouvement d’un repère par rapport à un autre repère.

Introduction à la mécanique du solide indéformable

Les champs disciplinaires de la mécanique du solide indéformable

- La cinématique : Etude des mouvements des solides, indépendamment des causes qui les provoquent.

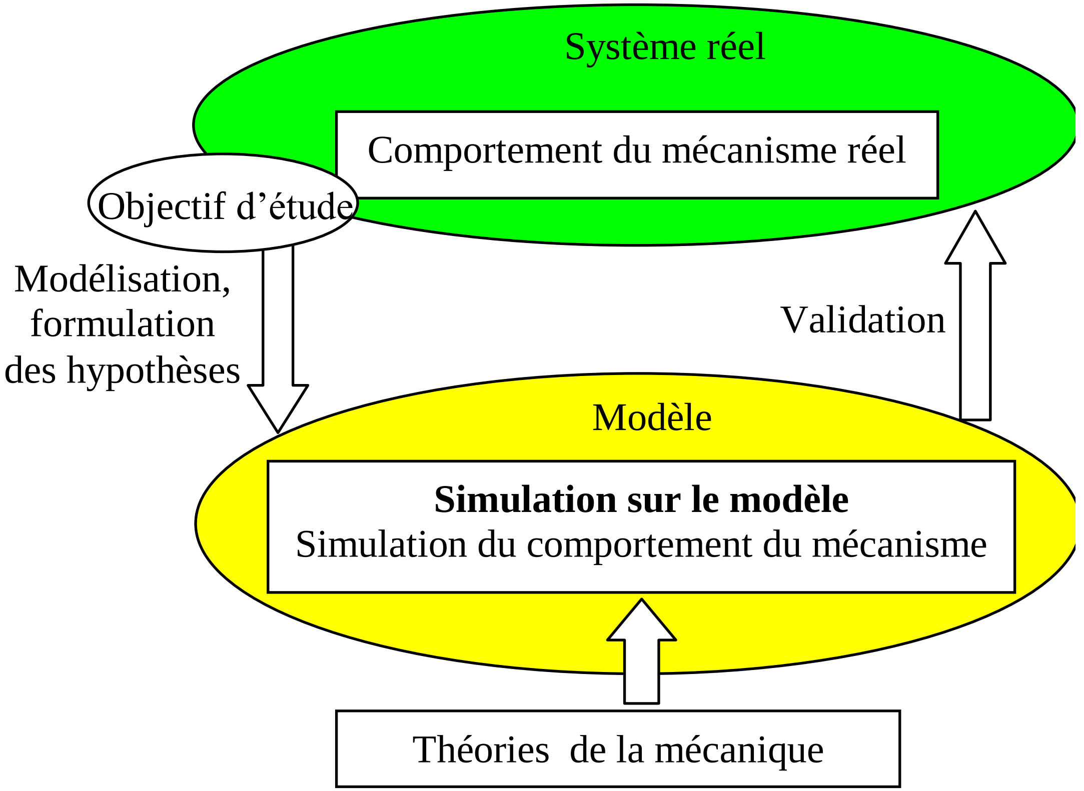
- La statique : Etude des actions mécaniques qui agissent sur les solides au repos (à l’équilibre, en l’absence de mouvement).

- La dynamique : Etude des relations qui existent entre les actions mécaniques appliquées aux solides et les mouvements qui en résultent.

Introduction à la mécanique du solide indéformable

Les champs disciplinaires de la mécanique du solide indéformable

Notion de modélisation en mécanique

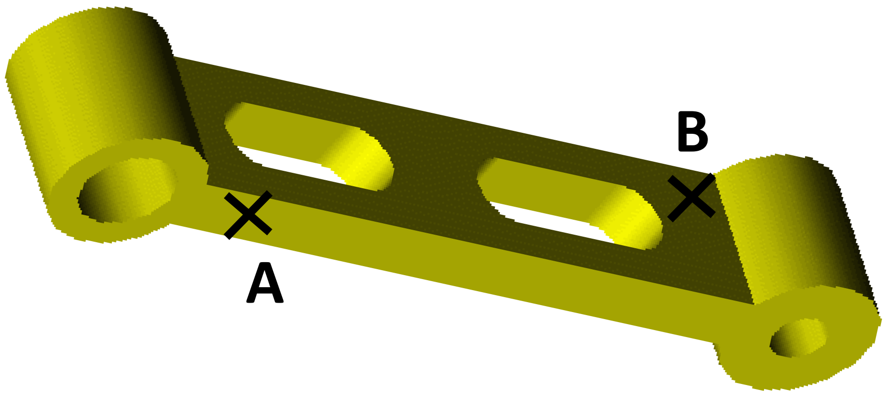


Introduction à la mécanique du solide indéformable

Solide indéformable

Pèces mécaniques qui composent le système → modélisées par des solides indéformables.

Solide indéformable → AB = cste au cours du mouvement. (A, B) ∈ Solide.



Les scalaires

Scalaires → Nombres positifs, négatifs ou nul (temps, température, masse, énergie, ...)

<u>Exemples :</u> une hauteur de 20 m, un volume de 18 m^3, une puissance de 200 MW,...

Les vecteurs

Vecteur, Vecteur libre, Vecteur lié

Vecteur (libre ou lié) $\in \mathbb{R}^3$ défini par :

3 grandeurs (3 composantes) de manière unique dans une base donnée de cet espace $\mathbb{R}^3$.

Les vecteurs

Vecteur, Vecteur libre, Vecteur lié

Exemple 1 : $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$ base de l'espace $\mathbb{R}^3$

$$\vec{V} = a.\vec{i} + b.\vec{j} + c.\vec{k} \text{ ou } \vec{V} = \left|\begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array}\right.$$

$$\text{Ambiguïté base} \rightarrow \vec{V} = \left|\begin{array}{l} a \\ b \\ c_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}} \end{array}\right.$$

Vecteur libre → rattaché à aucun point de l'espace

Vecteur lié → associé à un point.

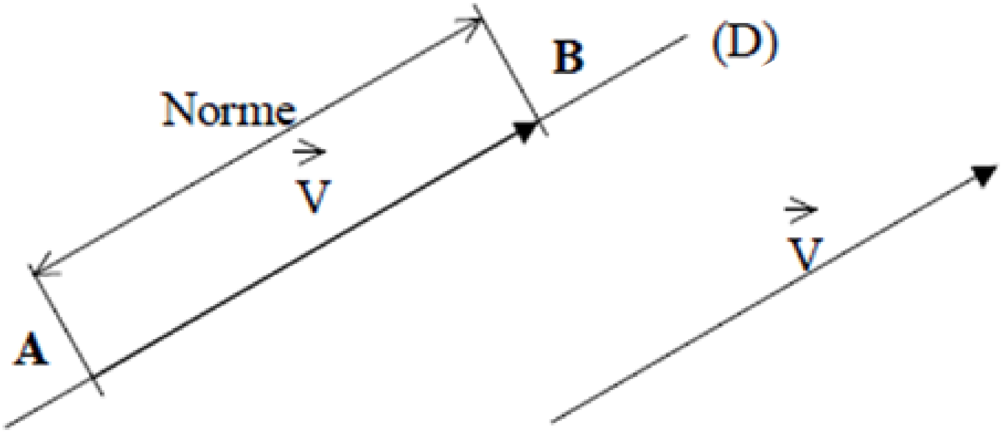
Notation : $\vec{V}$ (libre) et $\vec{V_p}$ (lié au point P).

Les vecteurs

Vecteur, Vecteur libre, Vecteur lié

Exemple 2 : $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ base de l'espace $\mathbb{R}^3$

x → composante du vecteur $\vec{V}$ suivant la direction $\vec{x}$



Pour le vecteur, on définit :

- Son support. Dans l'exemple, la droite (D) = (AB).
- Son sens. Dans l'exemple, de A vers B.
- Sa norme. Dans l'exemple, la distance de A à B.

Les vecteurs

Vecteur, Vecteur libre, Vecteur lié

Vecteur perpendiculairement à la feuille :

- Le vecteur sort de la feuille : $\odot$ $\vec{V}$
- Le vecteur rentre dans la feuille : $\otimes$ $-\vec{V}$

Les vecteurs

Norme de vecteur

Base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ est orthonormée

Norme d’un vecteur $\vec{V} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$:

$$\left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

la norme d’un vecteur est un nombre réel.

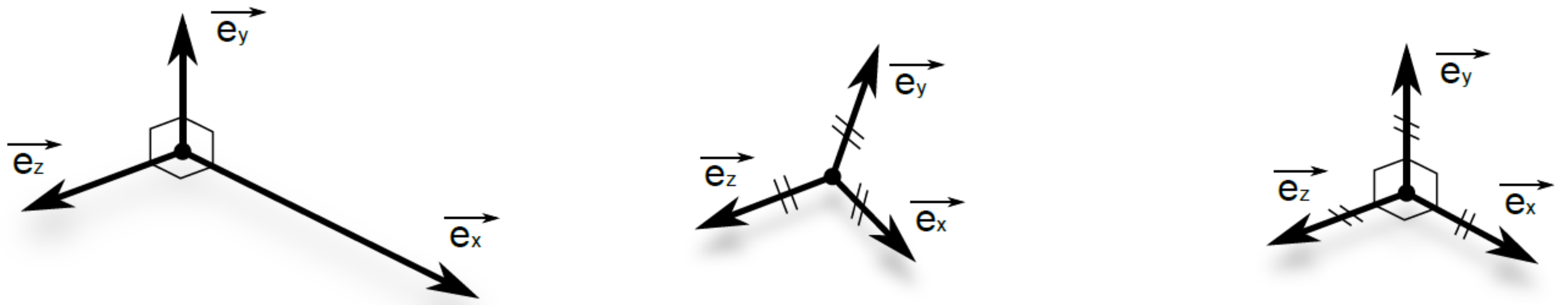
Les vecteurs

Base

$\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$

- Orthogonale → $\overrightarrow{e_x} \perp \overrightarrow{e_y} \perp \overrightarrow{e_z} \perp \overrightarrow{e_x}$
- Normée → $\|\overrightarrow{e_x}\| = \|\overrightarrow{e_y}\| = \|\overrightarrow{e_z}\|=1$
- Orthonormée → Orthogonale + Normée

Directe → Trièdre $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ est direct

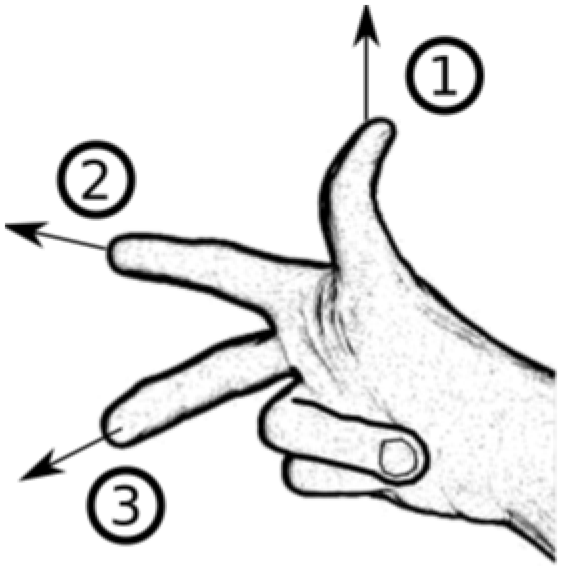


(a) Base orthogonale (b) Base normée (c) Base orthonormée

Les vecteurs

Base

<u>Astuce :</u> **La base est directe si elle vérifie la règle de la main droite.**

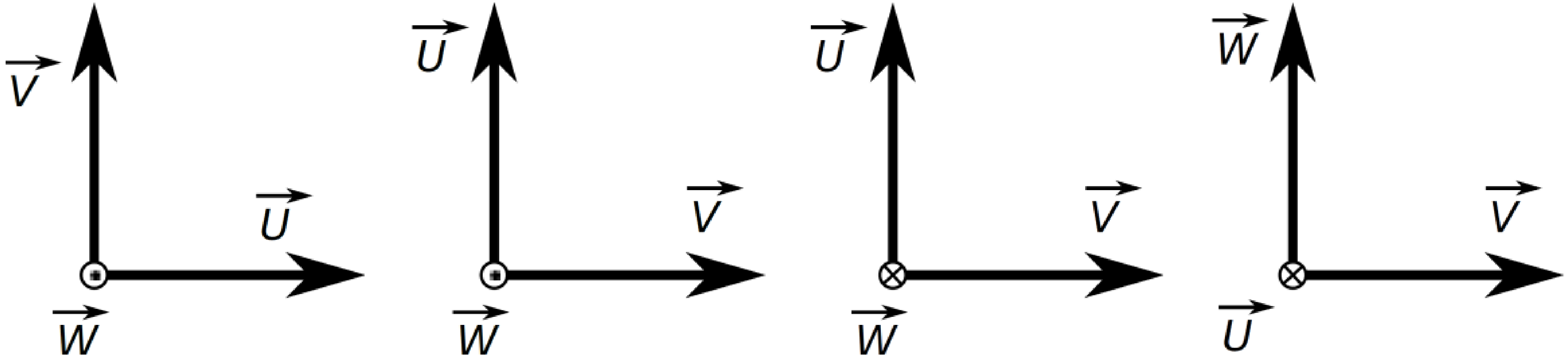


$$(\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ) = (\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W})$$
$$(\overrightarrow{W}, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$$
$$(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}, \overrightarrow{U})$$

Les vecteurs

Base

<u>Exemples :</u> $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ est-il direct ou non ?



Sens direct Sens indirect Sens direct Sens indirect

Nous travaillerons uniquement avec des

BOND

Les vecteurs

Opérations sur les vecteurs

Somme de vecteurs

$$\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V_2}=(a_1+a_2).\vec{\imath}+(b_1+b_2).\vec{\jmath}+(c_1+c_2).\vec{k}=\begin{vmatrix}a_1+a_2\\b_1+b_2\\c_1+c_2\end{vmatrix}$$

A condition que $\overrightarrow{V_1}=\begin{vmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{V_2}=\begin{vmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{vmatrix}$ soient exprimés dans la même base.

Remarque : $\left\|\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V_2}\right\|\neq\left\|\overrightarrow{V_1}\right\|+\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|$

Les vecteurs

Opérations sur les vecteurs

Multiplication par un scalaire

$$\alpha\vec{V} = \alpha.a.\vec{\imath} + \alpha.b.\vec{\jmath} + \alpha.c.\vec{k} = \begin{vmatrix} \alpha.a \\ \alpha.b \\ \alpha.c \end{vmatrix}$$

Les vecteurs

Produit scalaire

<u>Définition :</u> $\boldsymbol{\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = \left\|\overrightarrow{V_1}\right\|.\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|.\cos(\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2})}$. Le résultat du produit scalaire est un réel.

<u>Propriétés :</u>

- $\overrightarrow{V_1}.\left(\overrightarrow{V_2}+\overrightarrow{V_3}\right) = \overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}+\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_3}$: *distributivité par rapport à l'addition*
- $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_2}.\overrightarrow{V_1}$: *symétrie*
- Le produit scalaire est nul si :
  - $\overrightarrow{V_1}$ ou $\overrightarrow{V_2}$ est le vecteur nul,
  - ou si $\overrightarrow{V_1} \perp \overrightarrow{V_2}$.
- Le produit scalaire est positif si $\left(\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2}\right) \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

Les vecteurs

Produit scalaire

Expression analytique du produit scalaire :

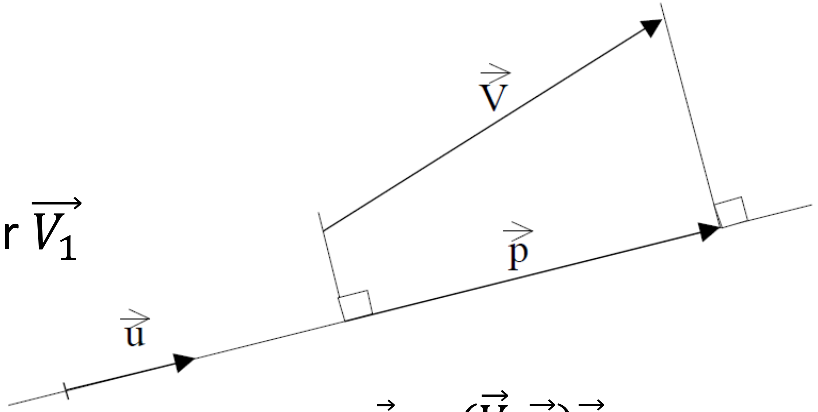
si $\overrightarrow{V_1} = \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{V_2} = \begin{vmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{vmatrix}$ sont exprimés dans une même base alors

$$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = \left\|\overrightarrow{V_1}\right\|.\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|.\cos\left(\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2}\right) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$$

Les vecteurs

Produit scalaire

<u>Interprétation géométrique :</u> Produit scalaire = Produit d'une norme et d'une projection.



$\vec{p} = (\vec{V}.\vec{u})\vec{u}$

<u>Remarques :</u>

- si $\left\|\overrightarrow{V_1}\right\| = 1$ alors $\overrightarrow{V_2}.\overrightarrow{V_1}$ = Projection, en valeur algébrique, de $\overrightarrow{V_2}$ sur $\overrightarrow{V_1}$

  si $\vec{V} = a.\vec{\imath} + b.\vec{\jmath} + c.\vec{k}$ alors $\vec{V}.\vec{\imath} = a$, $\vec{V}.\vec{\jmath} = b$ et $\vec{V}.\vec{k} = c$

- $\vec{\imath}.\vec{\imath} = 1$, $\vec{\jmath}.\vec{\jmath} = 1$, $\vec{k}.\vec{k} = 1$, $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = 0$, $\vec{\jmath}.\vec{k} = 0$, $\vec{k}.\vec{\imath} = 0$, $\vec{V}.\vec{V} = \left\|\vec{V}\right\|^2$

Les vecteurs

Produit vectoriel

<u>Définition :</u> $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$ Le résultat du produit vectoriel est un vecteur défini par :

- sa norme : $\boldsymbol{\left\|\overrightarrow{W}\right\| = \left\|\overrightarrow{V_1}\right\| . \left\|\overrightarrow{V_2}\right\| . \sin(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})}$
- sa direction : $\overrightarrow{W} \perp \overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{W} \perp \overrightarrow{V_2}$ (ou encore $\overrightarrow{W} . \overrightarrow{V_1} = 0$ et $\overrightarrow{W} . \overrightarrow{V_2} = 0$)
- son sens : $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{W})$ est direct

Les vecteurs

Produit vectoriel

<u>Propriétés :</u>

- $\overrightarrow{V_1} \wedge \left(\overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3}\right) = \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_3}$ *distributivité par rapport à l'addition*
- $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = -\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_1}$ *antisymétrie*
- Le produit vectoriel est nul si :
  - $\overrightarrow{V_1}$ ou $\overrightarrow{V_2}$ est le vecteur nul, ou si $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ sont colinéaires.

Les vecteurs

Produit vectoriel

Expression analytique du produit vectoriel :

$$\overrightarrow{V_1} = \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{vmatrix} \text{ et } \overrightarrow{V_2} = \begin{vmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_1} = \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1.c_2 - c_1.b_2 \\ c_1.a_2 - a_1.c_2 \\ a_1.b_2 - b_1.a_2 \end{vmatrix}$$

Les vecteurs

Produit vectoriel

<u>Astuce :</u> On reporte la 1ère ligne en 4ème ligne :

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1.c_2 - c_1.b_2 \\ c_1.a_2 - a_1.c_2 \\ a_1.b_2 - b_1.a_2 \end{vmatrix}$$

<u>Remarques :</u>

- $\vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = \vec{0}$, $\vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{0}$, $\vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$
- $\vec{V} \wedge \vec{V} = \vec{0}$
- $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$, $\vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}$, $\vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$ dans une base orthonormée directe

Les vecteurs

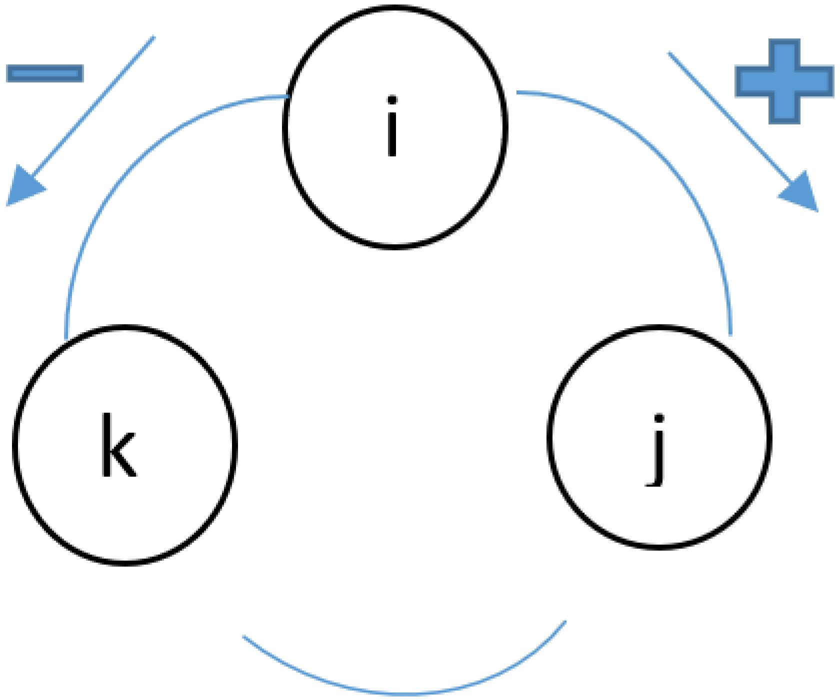
Produit vectoriel

Astuce :

Méthode 1 : Avec le sens d'écriture $\vec{\imath} \rightarrow \vec{\jmath} \rightarrow \vec{k} \rightarrow \vec{\imath} \rightarrow \vec{\jmath} \rightarrow \cdots$

Attention : En sens inverse, le vecteur résultat sera négatif.

Méthode 2 : Avec le sens horaire ou le sens trigonométrique



Les vecteurs

Produit vectoriel

Double produit vectoriel

$$\vec{U} \wedge \left(\vec{V} \wedge \vec{W}\right) = \left(\vec{U}.\vec{W}\right)\vec{V} - \left(\vec{U}.\vec{V}\right)\vec{W}$$

Les vecteurs

Produit vectoriel

Produit mixte

Invariant par permutation circulaire :

$$\vec{U}.\left(\vec{V} \wedge \vec{W}\right) = \vec{W}.\left(\vec{U} \wedge \vec{V}\right) = \vec{V}.\left(\vec{W} \wedge \vec{U}\right)$$

Nul si deux des vecteurs sont colinéaires ou si les trois vecteurs sont coplanaires.

Signification géométrique :

Produit mixte = Volume orienté (i.e. positif si $\left(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\right)$ est direct) du parallélépipède oblique engendré par ses 3 vecteurs.

Référentiel

Position des solides dans l'espace en fonction du temps

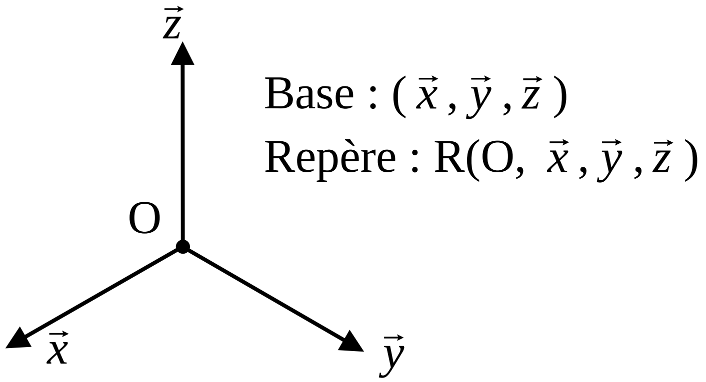
→ Un référentiel constitué d'un repère d'espace et d'un repère de temps.

Référentiel

Le repère d'espace

Il est constitué d'un repère orthonormé direct $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

- La base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
- L'origine O

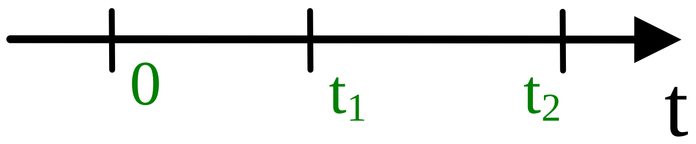


L'unité de distance est le mètre, l'unité d'angle est le radian.

Référentiel

Le repère de temps

Mesurer le temps qui s'écoule entre deux instants.



L'unité de mesure du temps est la seconde.

Référentiel

Paramétrage

À chaque solide → possible d'attacher un référentiel.

<u>**Attention :**</u> Le mouvement d'un solide dépend du référentiel dans lequel on étudie ce mouvement.

Référentiel

Paramétrage

<u>Paramétrage en mécanique :</u>

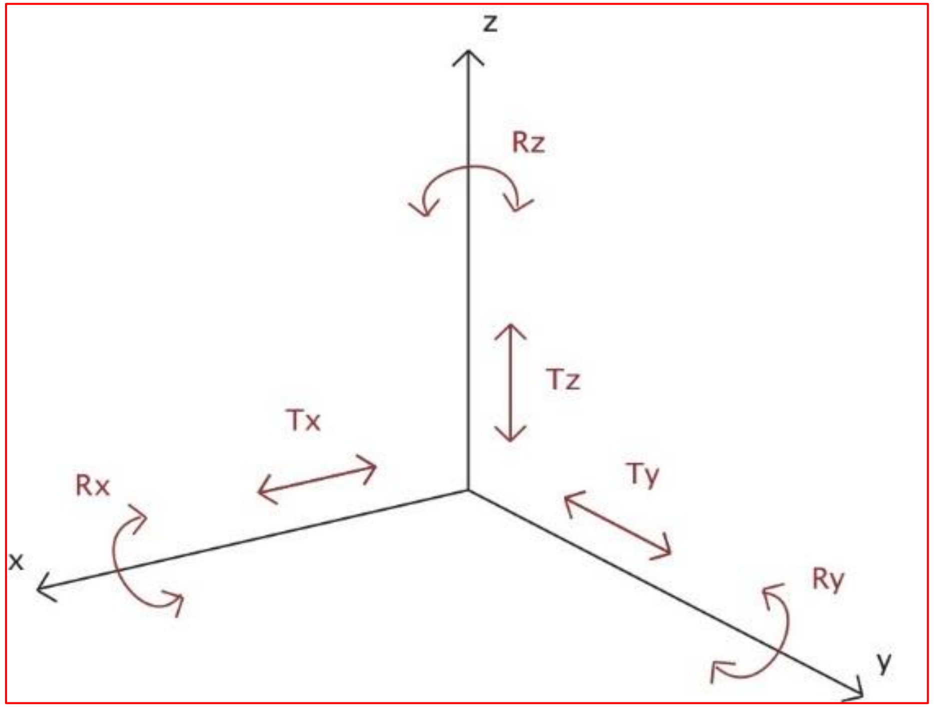
- Les trois coordonnées du point origine du repère R_k dans le repère R_i
- Les trois angles → orientation de la base du repère R_k par rapport à la base du repère R_i

Référentiel

Paramétrage

6 paramètres(ddl)

→ 3 coordonnées (3 translations) + 3 angles (3 rotations).

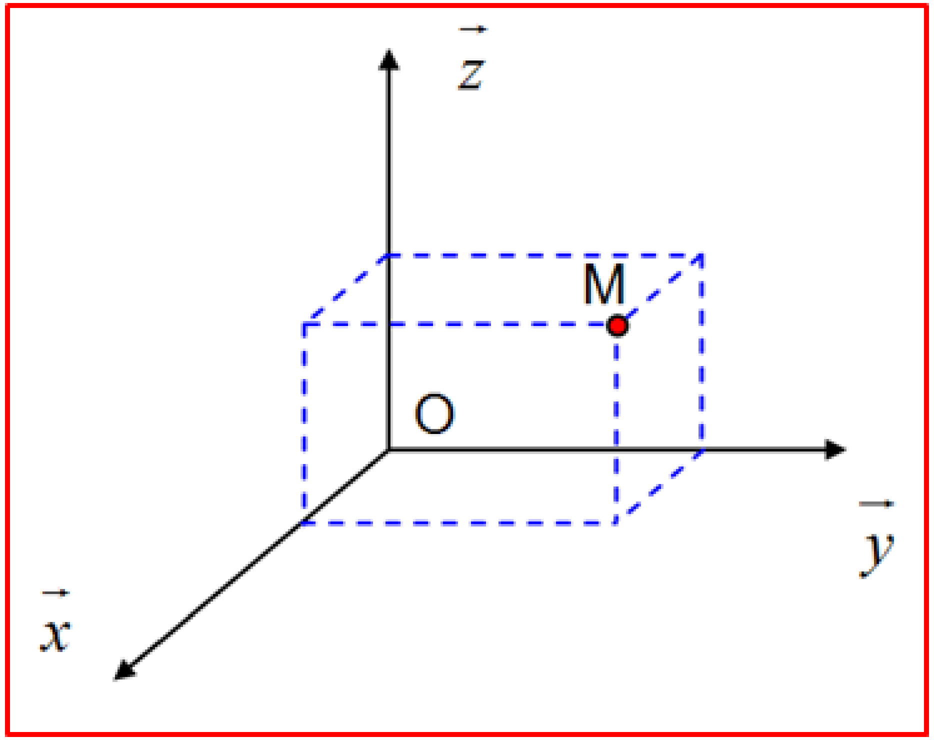


<u>Remarque :</u> Il ne faut pas confondre orientation et position. L'orientation concerne la position angulaire tandis que la position concerne les distances de déplacement.

Référentiel

Les différents types de coordonnées utilisées

Coordonnées cartésiennes



$(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ repère orthonormé direct.

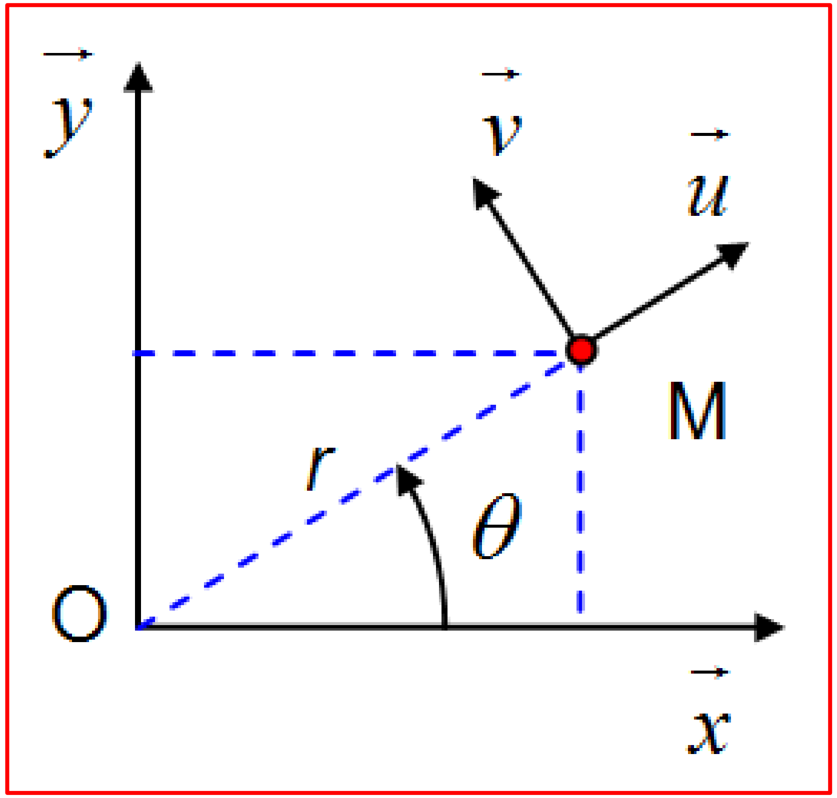
$$M = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}_{O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$$

ou encore $$\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}_{O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}} = x.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z}$$

Référentiel

Les différents types de coordonnées utilisées

Coordonnées polaires



$(O, \vec{x}, \vec{y})$ repère orthonormé direct.

$\overrightarrow{OM} = r.\vec{u}$ ou $\overrightarrow{OM} = r.(cos\theta.\vec{x} + sin\theta.\vec{y})$

$\vec{u}$: vecteur radial

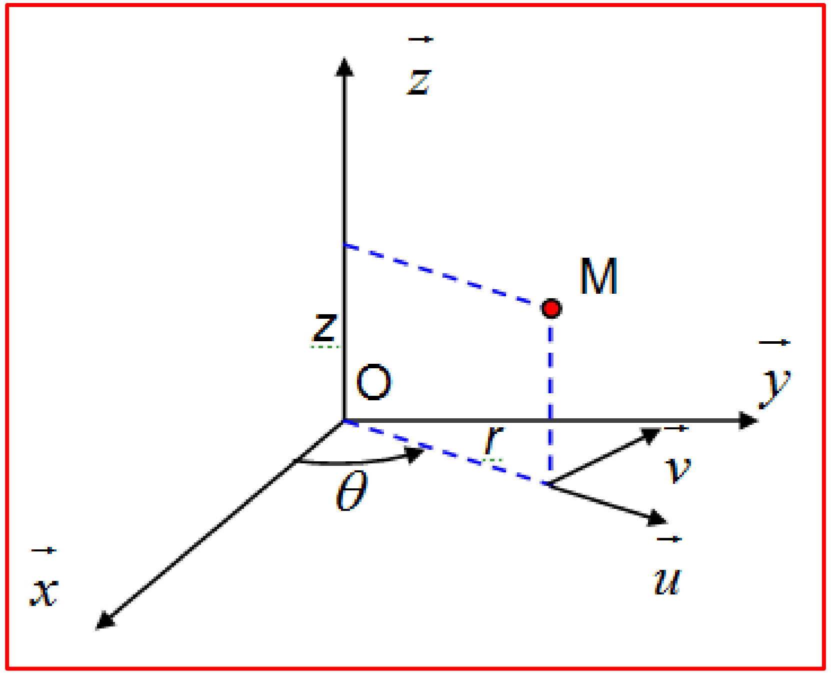
$\vec{v}$: vecteur orthoradial

$(\vec{u}, \vec{v})$ base orthonormée directe

Référentiel

Les différents types de coordonnées utilisées

Coordonnées cylindriques



$(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ repère orthonormé direct.

$\overrightarrow{OM} = r.\vec{u} + z.\vec{z}$ ou $\overrightarrow{OM} = r.(cos\theta.\vec{x} + sin\theta.\vec{y}) + z.\vec{z}$

$\vec{u}$: vecteur radial

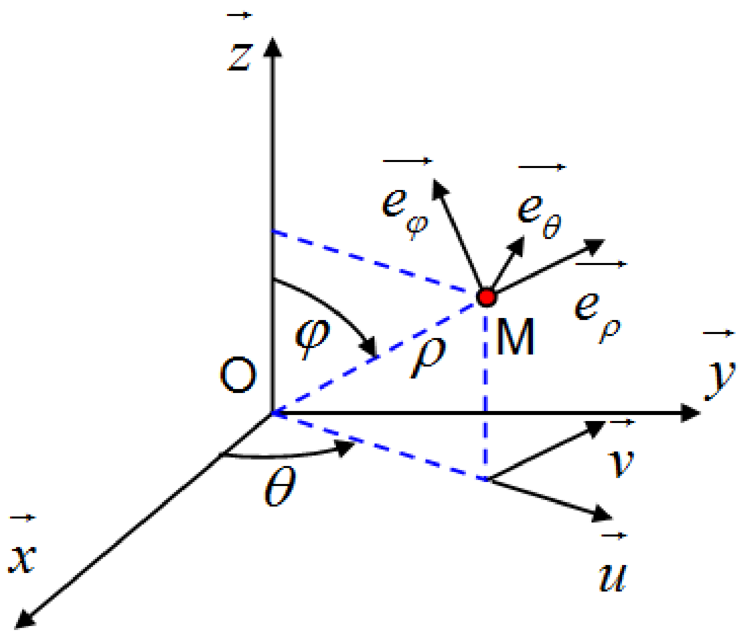
$\vec{v}$: vecteur orthoradial

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ base orthonormée directe

Référentiel

Les différents types de coordonnées utilisées

Coordonnées sphériques



$(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ repère orthonormé direct.

$\overrightarrow{OM} = \rho.\overrightarrow{e_\rho}$

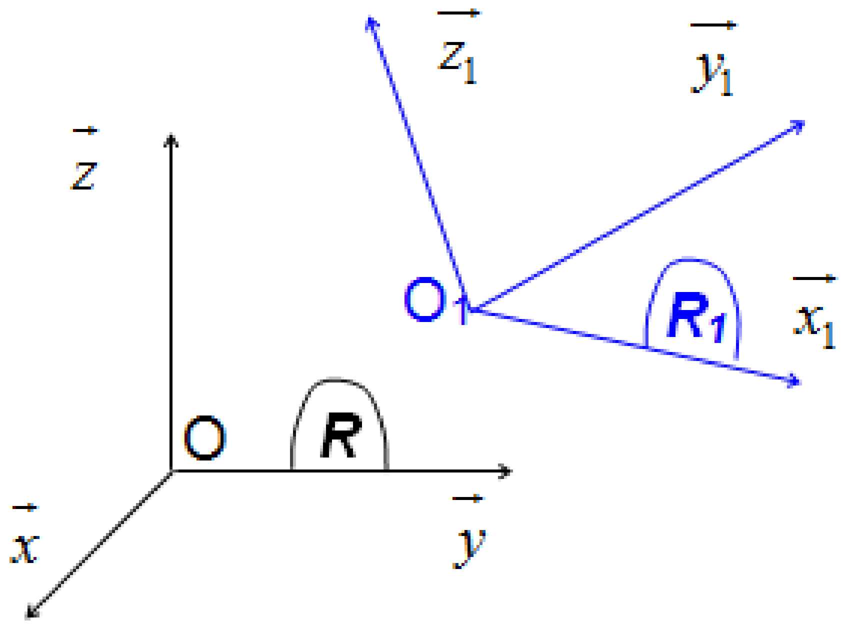
$\overrightarrow{OM} = \rho.sin\varphi.(cos\theta.\vec{x} + sin\theta.\vec{y}) + \rho.cos\varphi.\vec{z}$

$(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \vec{z})$ base orthonormée directe

Référentiel

Changement de référentiel

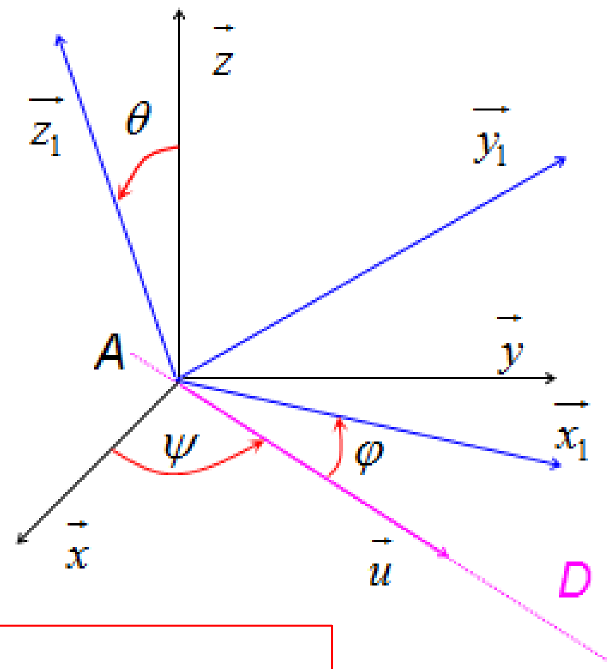
Position relative de deux repères



Pour définir la position du repère $R_1\ (O,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})$ par rapport à $R\ (O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ il faut :

- repérer la position de O_1 par ses coordonnées dans le repère *R*
- paramétrer l'orientation de R_1 par rapport à *R* par 3 angles

Référentiel



Changement de référentiel

Les angles d'Euler

Position angulaire relative de R_1 par rapport à R

→ 3 rotations successives (ψ, θ et φ).

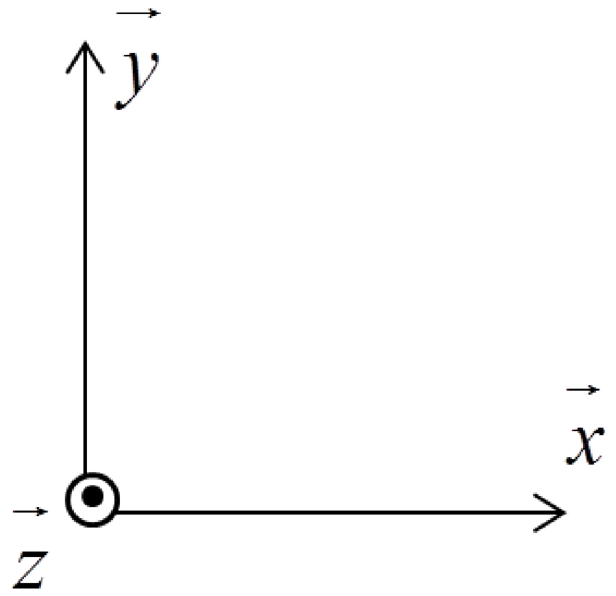
$$\left(\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right) \xrightarrow[\text{autour de } \vec{z}]{\psi} \left(\vec{u},\vec{v},\vec{z}\right) \xrightarrow[\text{autour de } \vec{u}]{\theta} \left(\vec{u},\vec{w},\vec{z_1}\right) \xrightarrow[\text{autour de } \vec{z_1}]{\varphi} \left(\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1}\right)$$

La maîtrise de la construction et de la lecture de ces figures planes de projection est indispensable à la résolution des problèmes de mécanique.

Référentiel

Les figures planes de changement de base

Premier repère → vecteur autour duquel se fait la rotation (vecteur commun aux deux repères) perpendiculaire à la feuille + pointant vers vous **<u>en s'assurant que la base est directe.</u>**

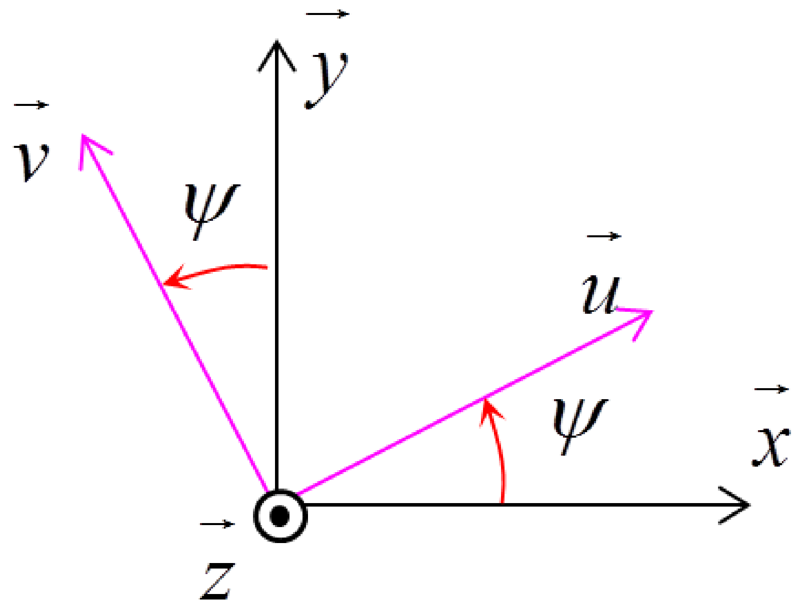


Référentiel

Les figures planes de changement de base

Second repère → angle orienté **<u>représenté à environ 15° et en respectant l'orientation de l'angle. (De quel axe part-il ? Sur quel axe arrive-t-il ?)</u>**

<u>L'angle doit toujours être orienté dans le sens direct sur la figure.</u>

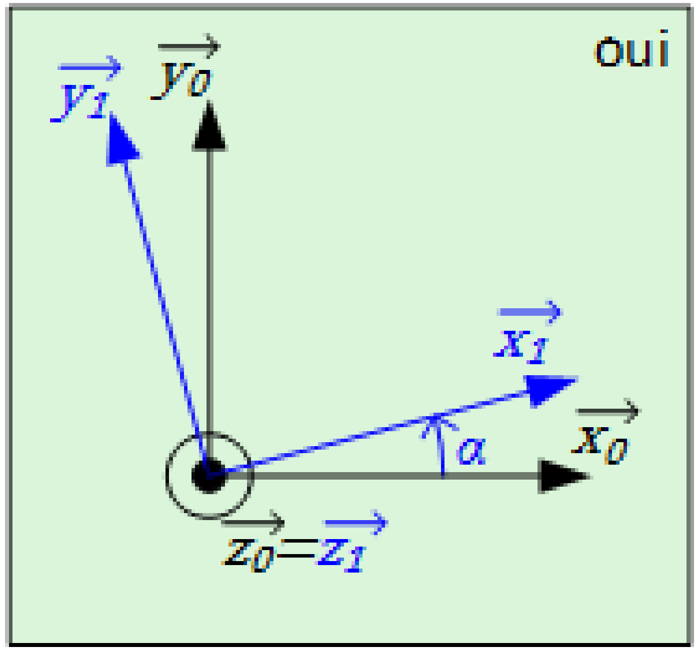


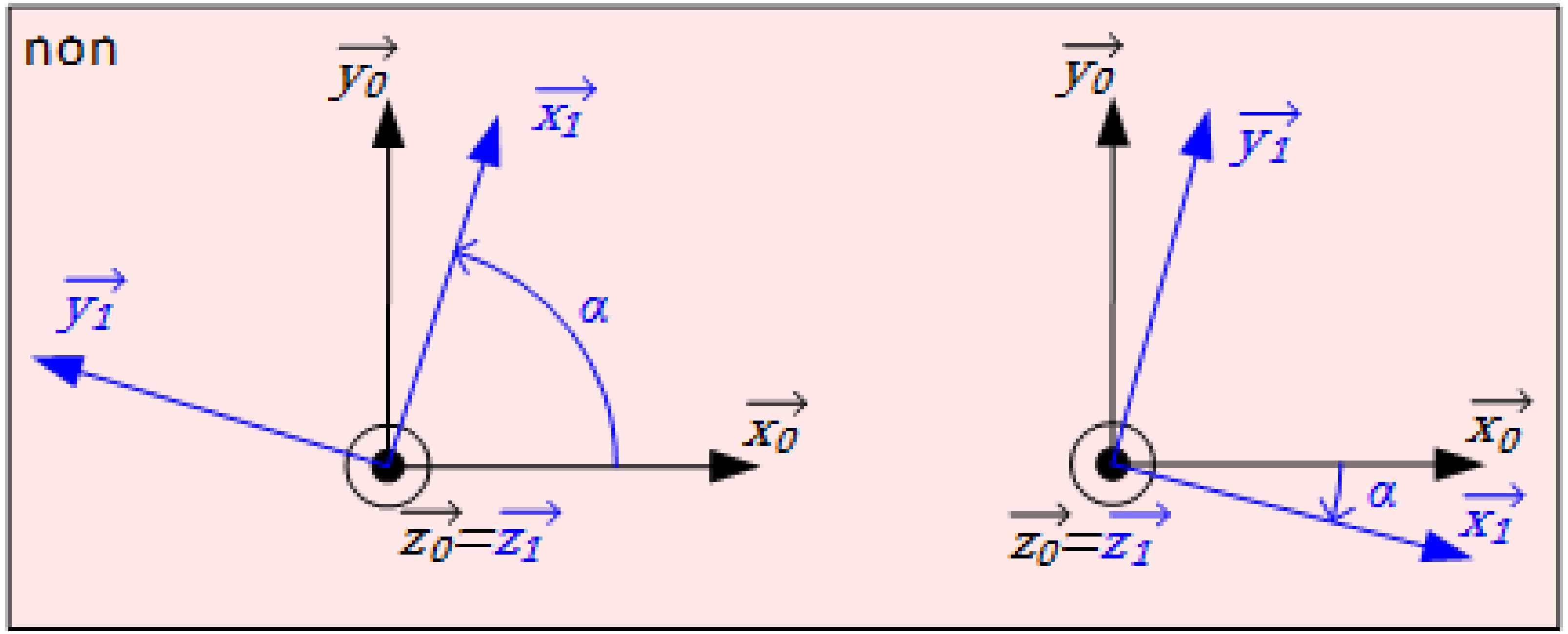
Ici $\psi = (\vec{x}, \vec{u}) = (\vec{y}, \vec{v})$.

<u>Remarque :</u> **Nous ne tiendrons JAMAIS COMPTE** du schéma réalisé dans une position particulière ni de la valeur algébrique des angles (120°, -36°, 85°…).

Référentiel

Les figures planes de changement de base



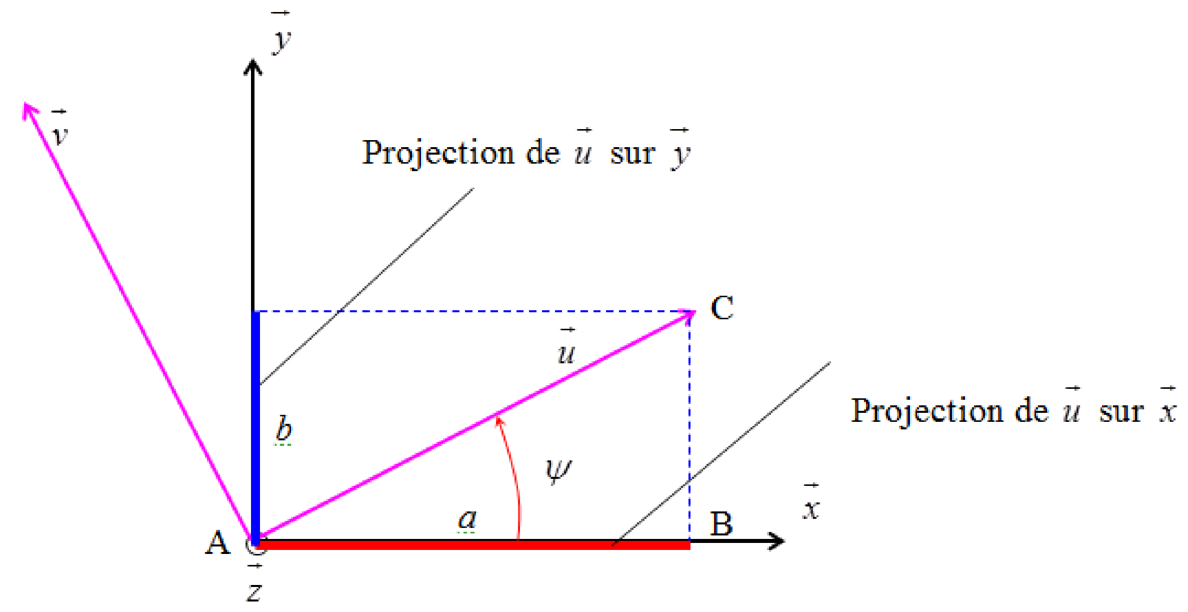


Référentiel

Les figures planes de changement de base

Effectuer des projections

Exemple : Exprimer le vecteur $\vec{u}$ dans la base $R\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$



$$\vec{u} = a.\vec{x} + b.\vec{y}$$

a = projection de $\vec{u}$ sur $\vec{x}$

b = projection de $\vec{u}$ sur$\vec{y}$

(triangle ABC) : $cos\psi = \frac{|a|}{\|\vec{u}\|}$ et $sin\psi = \frac{|b|}{\|\vec{u}\|}$

donc $|a| = cos\psi$ et $|b| = sin\psi$ puisque $\|\vec{u}\| = 1.$

Signes :

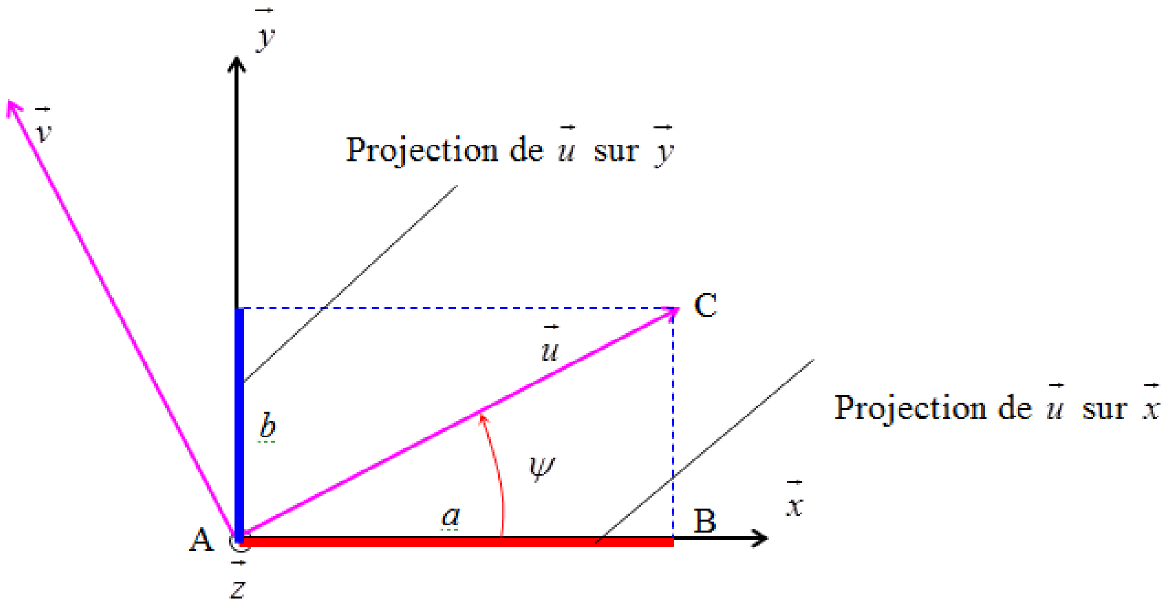
- projection de $\vec{u}$ sur $\vec{x}$ → même sens que $\vec{x}$ donc $a \geq 0$
- projection de $\vec{u}$ sur $\vec{y}$ → même sens que $\vec{y}$ donc $b \geq 0$

Référentiel

Les figures planes de changement de base

Effectuer des projections

Exemple : Exprimer le vecteur $\vec{u}$ dans la base $R\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$



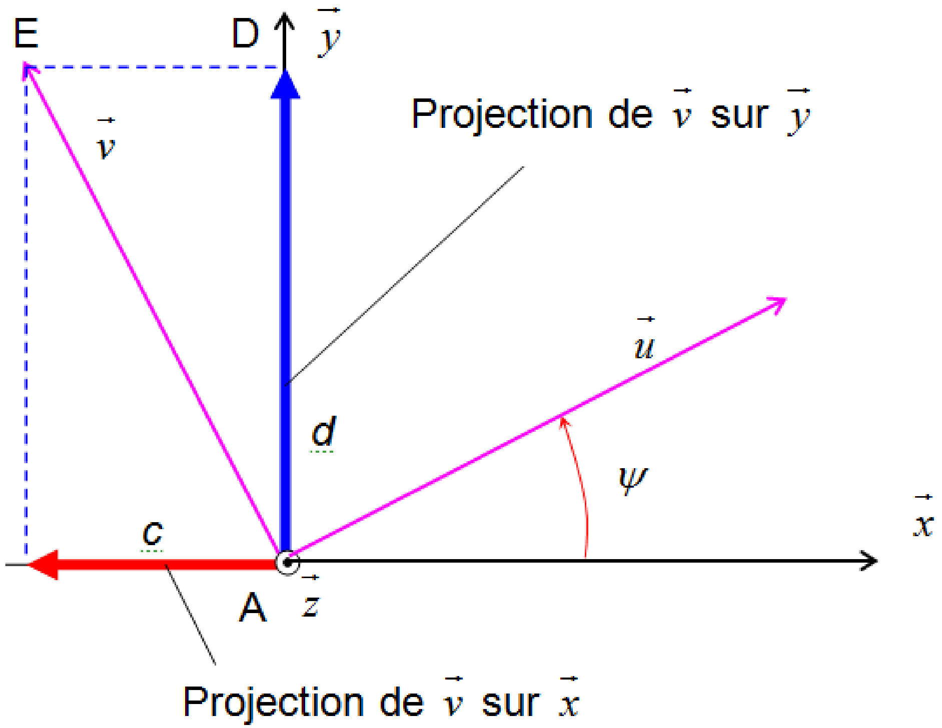
$$\vec{u} = \cos\psi.\vec{x} + \sin\psi.\vec{y}$$

Référentiel

Les figures planes de changement de base

Effectuer des projections

Exemple : Exprimer le vecteur $\vec{v}$ dans la base $R\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.



$$\vec{v} = c.\vec{x} + d.\vec{y}$$

c = projection de $\vec{v}$ sur $\vec{x}$

d = projection de $\vec{v}$ sur $\vec{y}$

(triangle ADE) : $cos\psi = \frac{|d|}{\|\vec{v}\|}$ et $sin\psi = \frac{|c|}{\|\vec{v}\|}$

$|d| = cos\psi$ et $|c| = sin\psi$ puisque $\|\vec{v}\| = 1$

Signes :

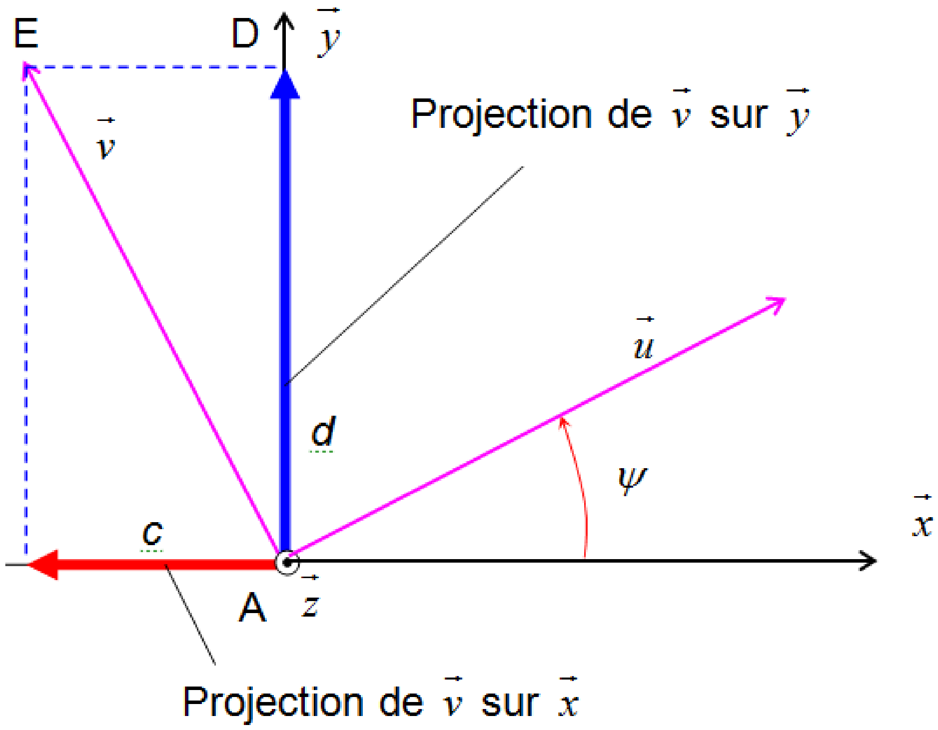
- projection de $\vec{v}$ sur $\vec{x}$ → sens opposé à $\vec{x}$ donc $c \leq 0$
- projection de $\vec{v}$ sur $\vec{y}$ → même sens que $\vec{y}$ donc $d \geq 0$

Référentiel

Les figures planes de changement de base

Effectuer des projections

Exemple : Exprimer le vecteur $\vec{v}$ dans la base $R\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.



$$\vec{v} = -\sin\psi.\vec{x} + \cos\psi.\vec{y}$$

Référentiel

Les figures planes de changement de base

Exprimer un vecteur dans une autre base

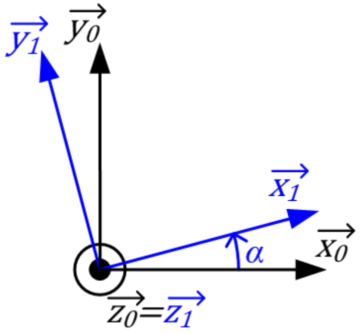
Exemple : Un vecteur $\vec{F}$ est exprimé dans la base R_u sous la forme $\vec{F} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}_{R_u} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} + \gamma.\vec{z}$

$$\vec{F} = \alpha.(cos\psi.\vec{x} + sin\psi.\vec{y}) + \beta.(-sin\psi.\vec{x} + cos\psi.\vec{y}) + \gamma.\vec{z}$$

ou encore $\vec{F} = \begin{pmatrix} \alpha.cos\psi - \beta.sin\psi \\ \alpha.sin\psi + \beta.cos\psi \\ \gamma \end{pmatrix}_{R}$

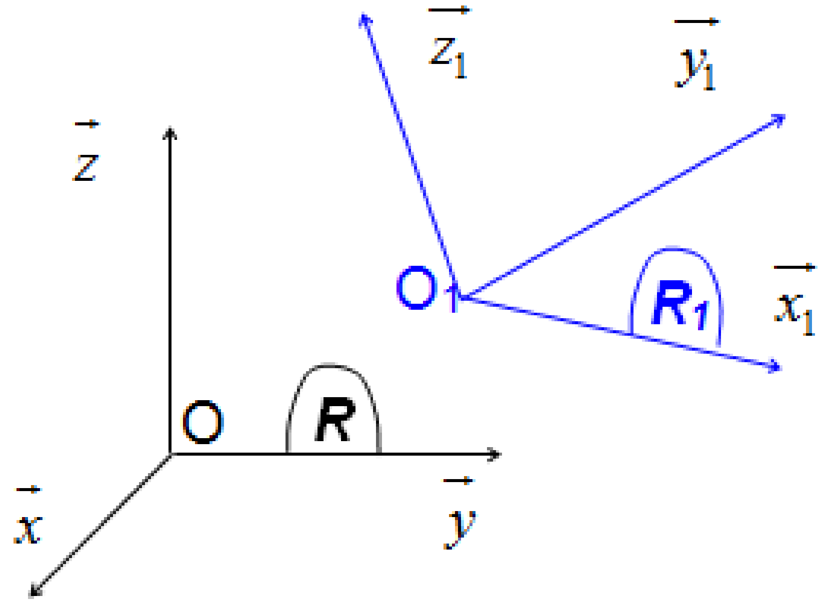
Référentiel

Calculs entre des vecteurs de base

Calculs entre des vecteurs de base	Exemples pour le produit scalaire	Exemples pour le produit vectoriel
1er cas : les deux vecteurs sont exprimés dans la même base	$\vec{x}.\vec{y} = 0$ $\vec{y}.\vec{z} = 0$ $\vec{z}.\vec{x} = 0$ $\vec{x}.\vec{x} = 1$ $\vec{y}.\vec{y} = 1$ $\vec{z}.\vec{z} = 1$	L'ordre des vecteurs dans une base directe est : $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{x}, \ldots$ Sens direct : $\vec{x}\wedge\vec{y} = \vec{z}$ $\vec{y}\wedge\vec{z} = \vec{x}$ $\vec{z}\wedge\vec{x} = \vec{y}$ Sens indirect : $\vec{y}\wedge\vec{x} = -\vec{z}$ $\vec{z}\wedge\vec{y} = -\vec{x}$ $\vec{x}\wedge\vec{z} = -\vec{y}$ $\vec{x}\wedge\vec{x} = \vec{y}\wedge\vec{y} = \vec{z}\wedge\vec{z} = 0$
2ème cas : les 2 vecteurs sont définis dans la même figure plane :  	$\vec{x_0}.\vec{x_1} = \vec{x_1}.\vec{x_0}$ $= \cos\alpha$ $\vec{y_0}.\vec{y_1}$ $= \vec{y_1}.\vec{y_0} = \cos\alpha$ $\vec{x_0}.\vec{y_1} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ $= -\sin\alpha$ $\vec{y_0}.\vec{x_1} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ $= +\sin\alpha$	= 3 signe 2 norme 1 vecteur $\perp$ $\vec{x_0}\wedge\vec{x_1} = +\lvert\sin\alpha\rvert.\vec{z_0}$ $= \sin\alpha.\vec{z_0}$ $\vec{y_0}\wedge\vec{y_1} = +\lvert\sin\alpha\rvert.\vec{z_0}$ $= \sin\alpha.\vec{z_0}$ $\vec{x_1}\wedge\vec{x_0} = -\lvert\sin\alpha\rvert.\vec{z_0}$ $= -\sin\alpha.\vec{z_0}$ $\vec{y_1}\wedge\vec{y_0} = -\lvert\sin\alpha\rvert.\vec{z_0}$ $= -\sin\alpha.\vec{z_0}$ $\vec{x_0}\wedge\vec{y_1} = +\left\lvert\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right\rvert.\vec{z_0} = \cos\alpha.\vec{z_0}$ $\vec{y_0}\wedge\vec{x_1} = -\left\lvert\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right\rvert.\vec{z_0} = -\cos\alpha.\vec{z_0}$ <u>NB :</u> la simplification de $\lvert\ \rvert$ ne se fait pour l'angle α petit et > 0 mais le résultat du produit vectoriel demeure correct $\forall\alpha$.
3ème cas : les vecteurs ne sont : • ni exprimés dans la même base • ni définis dans la même figure plane	Il est nécessaire de projeter un des 2 vecteurs pour se rapporter à un des 2 cas précédents. **<u>NB :</u> C'est la SEULE et UNIQUE situation où il est nécessaire d'effectuer des projections**	

Dérivation d’un vecteur mobile par rapport à un repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

Notion de dérivation par rapport à un repère



Repère R_1 en mouvement par rapport au repère R fixe.

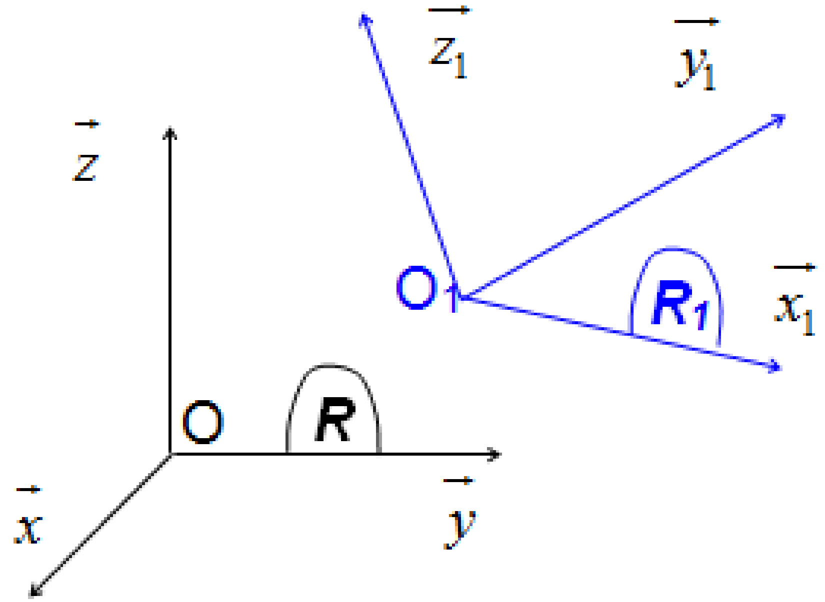
$\vec{U} = a.\overrightarrow{x_1} + b.\overrightarrow{y_1} + c.\overrightarrow{z_1}$, ou a, b et c sont des constantes.

Pour dériver ce vecteur par rapport au temps :

- la variation de ces composantes en fonction du temps
- la variation par rapport au temps des vecteurs de la base dans laquelle il est exprimé

Dérivation d'un vecteur mobile par rapport à un repère R$(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Notion de dérivation par rapport à un repère



$$\left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{R_1} = \vec{0}$$

Le vecteur $\vec{U}$ est un vecteur mobile par rapport au repère R.

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{R} \neq \vec{0}.$$

<u>Conséquence :</u> La dérivée d'un vecteur dépend du repère de dérivation qui devra systématiquement être spécifié.

Dérivation d'un vecteur mobile par rapport à un repère R$(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

Les coordonnées du vecteur sont exprimées dans le repère de dérivation R$(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

$\vec{U}$ = $\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}_R$ ou $\vec{U} = a(t).\vec{x} + b(t).\vec{y} + c(t).\vec{z}$

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_R = \dot{a}(t).\vec{x} + \dot{b}(t).\vec{y} + \dot{c}(t).\vec{z} + a(t).\left[\frac{d}{dt}\vec{x}\right]_R + b(t).\left[\frac{d}{dt}\vec{y}\right]_R + c(t).\left[\frac{d}{dt}\vec{z}\right]_R$$

Or $\left[\frac{d}{dt}\vec{x}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\vec{y}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\vec{z}\right]_R = \vec{0}$, car $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont des vecteurs fixes de R.

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_R = \frac{d}{dt}a(t).\vec{x} + \frac{d}{dt}b(t).\vec{y} + \frac{d}{dt}c(t).\vec{z} = \dot{a}(t).\vec{x} + \dot{b}(t).\vec{y} + \dot{c}(t).\vec{z}$$

Dérivation d'un vecteur mobile par rapport à un repère R$(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

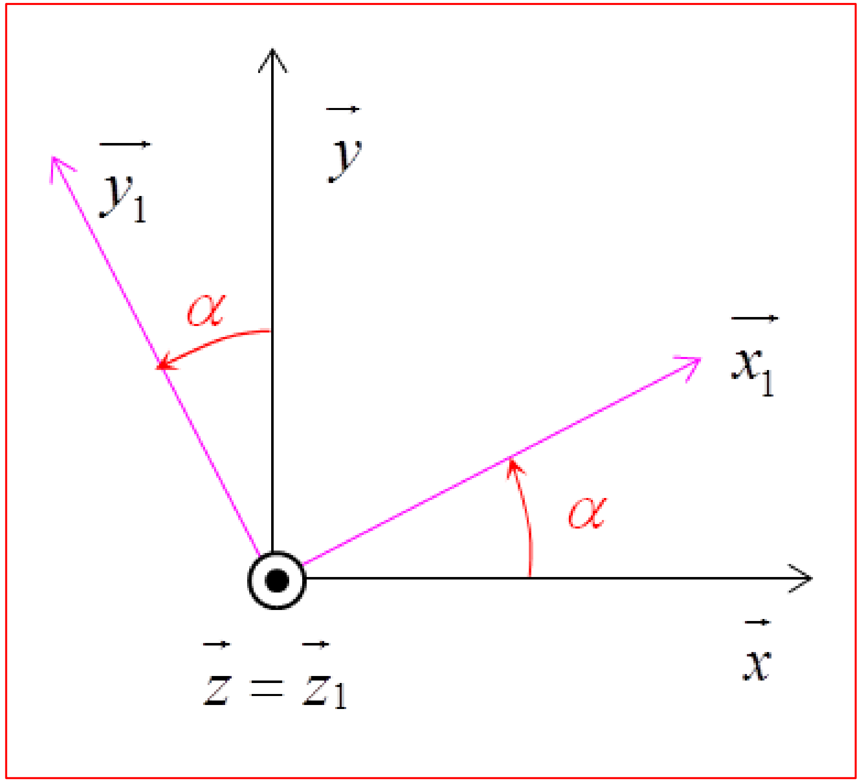
Les coordonnées du vecteur sont exprimées dans un autre repère que le repère de dérivation R$(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ b_1(t) \\ c_1(t) \end{pmatrix}_{R_1} \text{ ou } \vec{U} = a_1(t).\overrightarrow{x_1} + b_1(t).\overrightarrow{y_1} + c_1(t).\overrightarrow{z_1}$$

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_R = \underbrace{\dot{a}_1(t).\overrightarrow{x_1} + \dot{b}_1(t).\overrightarrow{y_1} + \dot{c}_1(t).\overrightarrow{z_1}}_{\left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{R_1}} + \underbrace{a_1(t).\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{x_1}\right]_R + b_1(t).\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{y_1}\right]_R + c_1(t).\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{z_1}\right]_R}_{\vec{V}}$$

Dérivation d'un vecteur mobile par rapport à un repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

Les coordonnées du vecteur sont exprimées dans un autre repère que le repère de dérivation $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$



- $\overrightarrow{x_1} = cos\alpha.\vec{x} + sin\alpha.\vec{y}$
- $\overrightarrow{y_1} = -sin\alpha.\vec{x} + cos\alpha.\vec{y}$
- $\overrightarrow{z_1} = \vec{z}$

Dérivation d'un vecteur mobile par rapport à un repère R(O, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$)

Les coordonnées du vecteur sont exprimées dans un autre repère que le repère de dérivation R(O,$\vec{x}$,$\vec{y}$,$\vec{z}$)

On dérive chaque vecteur unitaire du repère R_1 :

$$\begin{cases} \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{x_1}\right]_R = \left[\frac{d}{d\alpha}\overrightarrow{x_1}\right]_R \dfrac{d}{dt}\alpha = (-sin\alpha.\vec{x} + cos\alpha.\vec{y})\dot{\alpha} = \dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} = \dot{\alpha}.\overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{x_1} \\ \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{y_1}\right]_R = \left[\frac{d}{d\alpha}\overrightarrow{y_1}\right]_R \dfrac{d}{dt}\alpha = (-cos\alpha.\vec{x} - sin\alpha.\vec{y})\dot{\alpha} = -\dot{\alpha}.\overrightarrow{x_1} = \dot{\alpha}.\overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{y_1} \\ \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{z_1}\right]_R = \vec{0} = \dot{\alpha}.\overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{z_1} \end{cases}$$

d'où $\vec{V} = a_1(t).\dot{\alpha}.\vec{z} \wedge \overrightarrow{x_1} + b_1(t).\dot{\alpha}.\vec{z} \wedge \overrightarrow{y_1} + c_1(t).\dot{\alpha}.\vec{z} \wedge \overrightarrow{z_1}$

ou encore $\vec{V} = \dot{\alpha}.\vec{z} \wedge (a_1(t).\overrightarrow{x_1} + b_1(t).\overrightarrow{y_1} + c_1(t).\overrightarrow{z_1})$

Dérivation d'un vecteur mobile par rapport à un repère R$(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

Les coordonnées du vecteur sont exprimées dans un autre repère que le repère de dérivation R$(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

Définition : On appelle vecteur vitesse instantanée de rotation de R_1 par rapport à R le vecteur $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} = \dot{\alpha}.\vec{z}$

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \vec{U}$$

(Formule de la base mobile)

L'utilisation de cette formule est indispensable à la manipulation de la dérivation vectorielle.

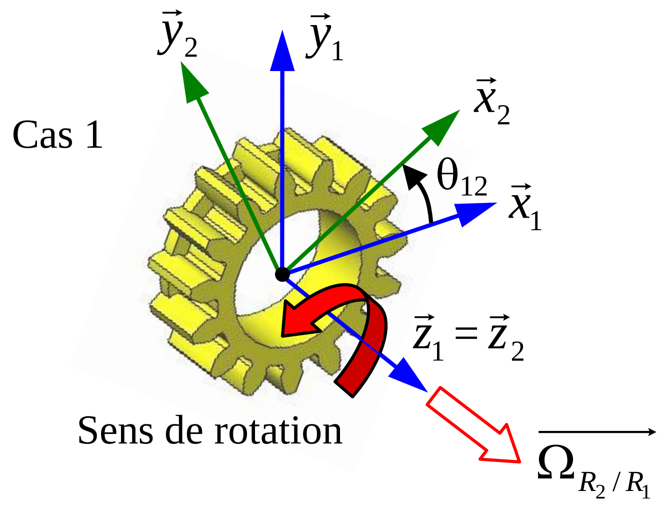
Vecteur vitesse instantanée de rotation

Définition

Mouvement de rotation d'un pignon par rapport l'axe $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_2}$.

Le pignon est solidaire du repère 2.

Le paramètre angulaire permettant de repérer le repère 2 par rapport 1 est noté θ_{12}.

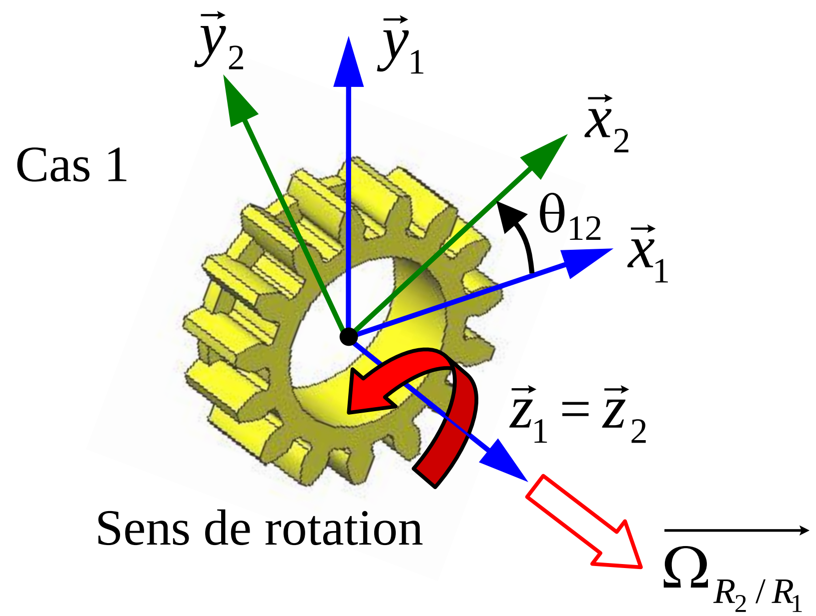


Vecteur vitesse instantanée de rotation

Définition

<u>Définition :</u> Le vecteur vitesse instantanée de rotation de R_2 par rapport à R_1 est défini par :

$$\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} = \dot{\theta}_{12}.\overrightarrow{z_1} = \dot{\theta}_{12}.\overrightarrow{z_2}$$



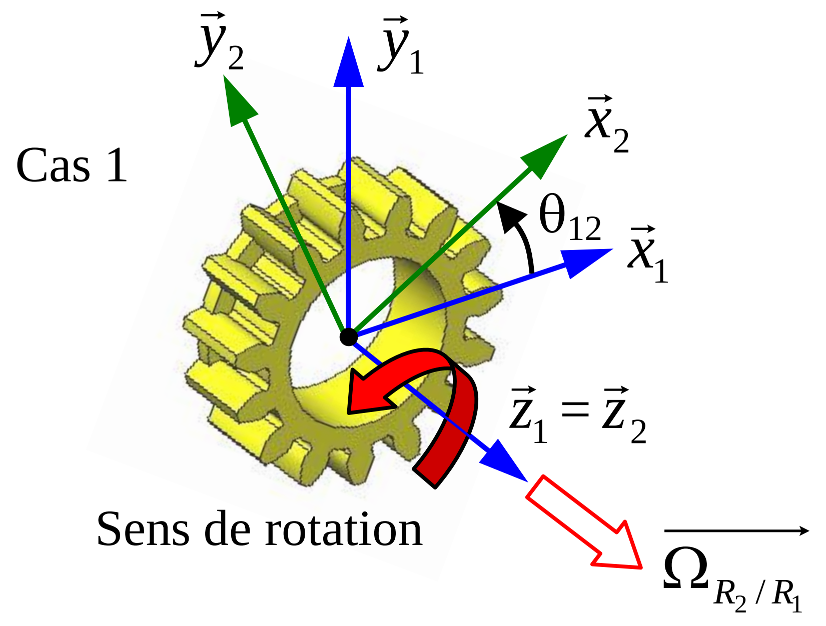
- Direction → Axe autour duquel R_2 tourne autour de R_1.
- Norme → Amplitude de la vitesse angulaire (rotation).
- (Unité : **rad/s**).
- Sens → Sens de la rotation.

Vecteur vitesse instantanée de rotation

Définition

<u>Antisymétrie :</u>

$$\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} = -\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_2}}$$

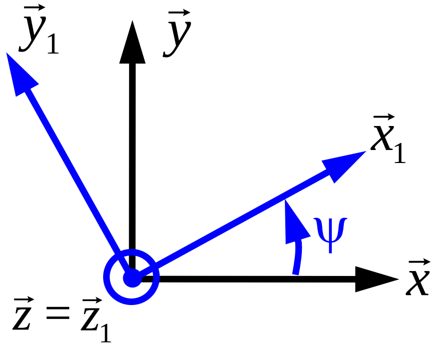


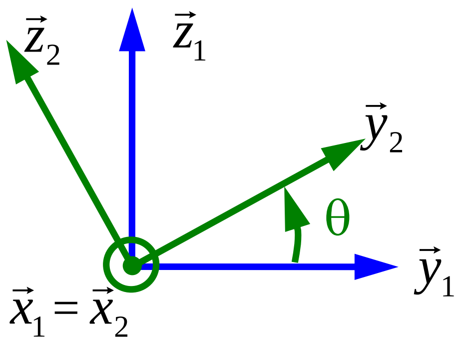
Vecteur vitesse instantanée de rotation

Définition

<u>Composition des vecteurs vitesse instantanée de rotation :</u>

Deux vecteurs vitesse instantanée de rotation
$\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} = \dot{\psi}.\overrightarrow{z_1}$ et $\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} = \dot{\theta}.\overrightarrow{x_1}$.





On montre que :

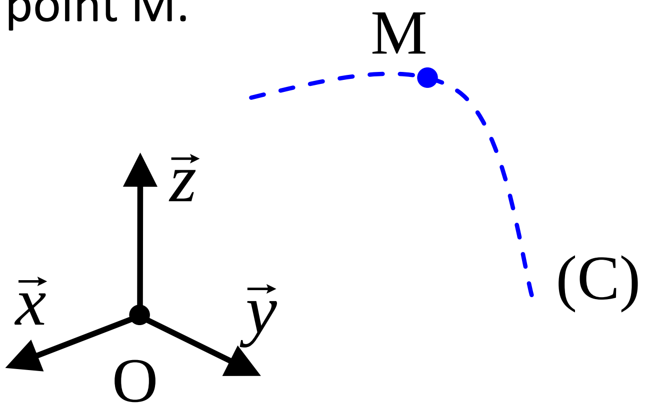
$$\boldsymbol{\overrightarrow{\Omega_{R_2/R}} = \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}} \text{ soit } \boldsymbol{\overrightarrow{\Omega_{R_2/R}} = \dot{\theta}.\overrightarrow{x_1} + \dot{\psi}.\overrightarrow{z_1}}$$

Cinématique du point

Trajectoire du point M par rapport à un repère R

$M\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}_R$ ou encore $\overrightarrow{OM} = a(t).\vec{x} + b(t).\vec{y} + c(t).\vec{z}$

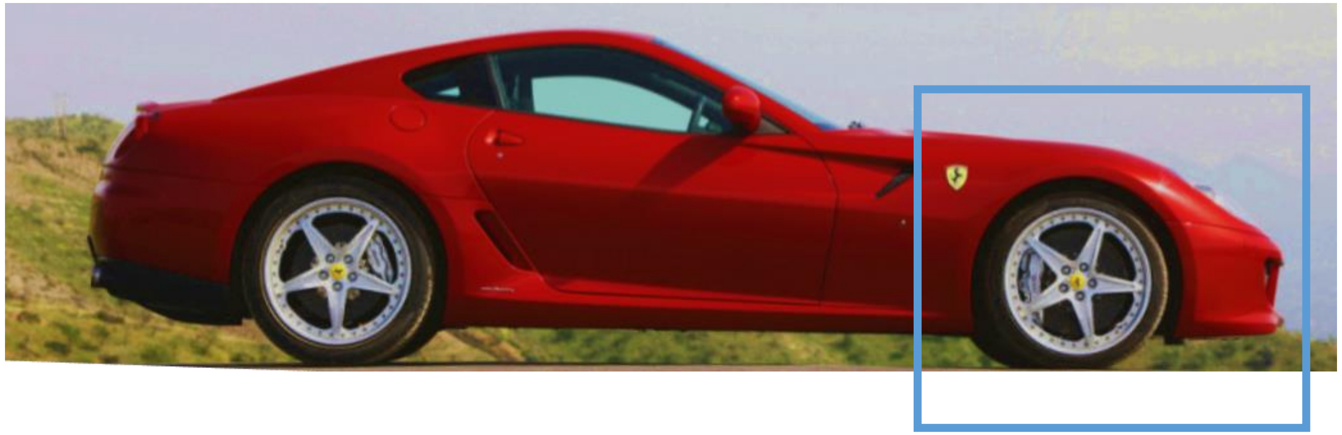
Le lieu de l'espace décrit par M quand t varie = <u>trajectoire</u> (C) du point M.

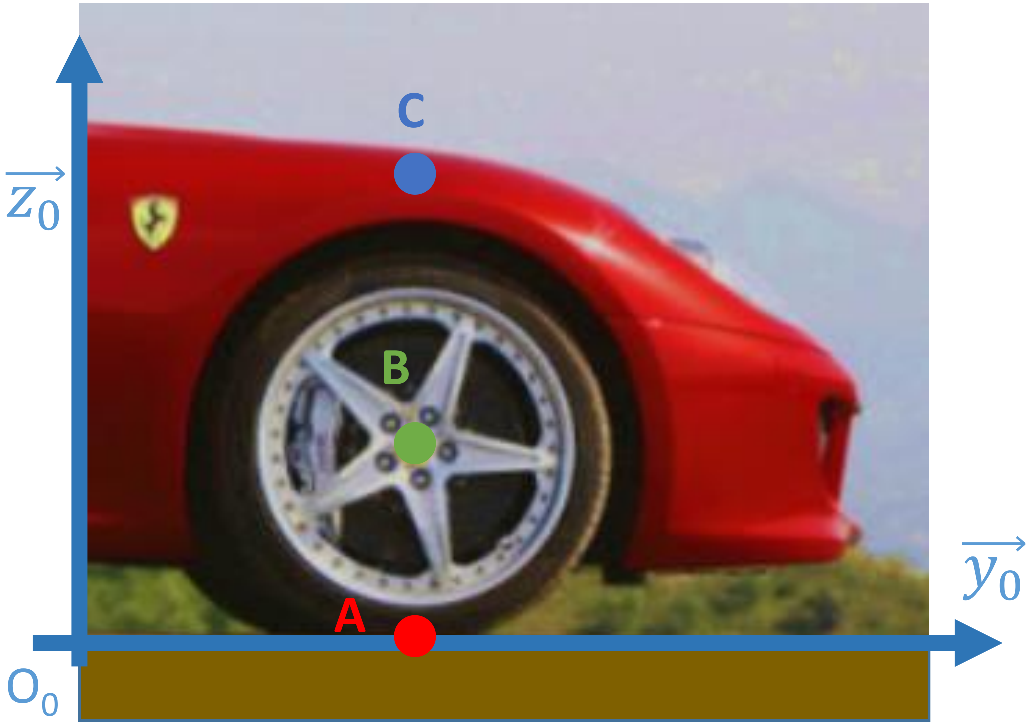


Cinématique du point

Trajectoire du point M par rapport à un repère R

- A = point de contact entre la roue (1) et le sol (0) à l'instant initial
- B = sur l'axe de la roue (1)
- C = un point de la carrosserie (2)

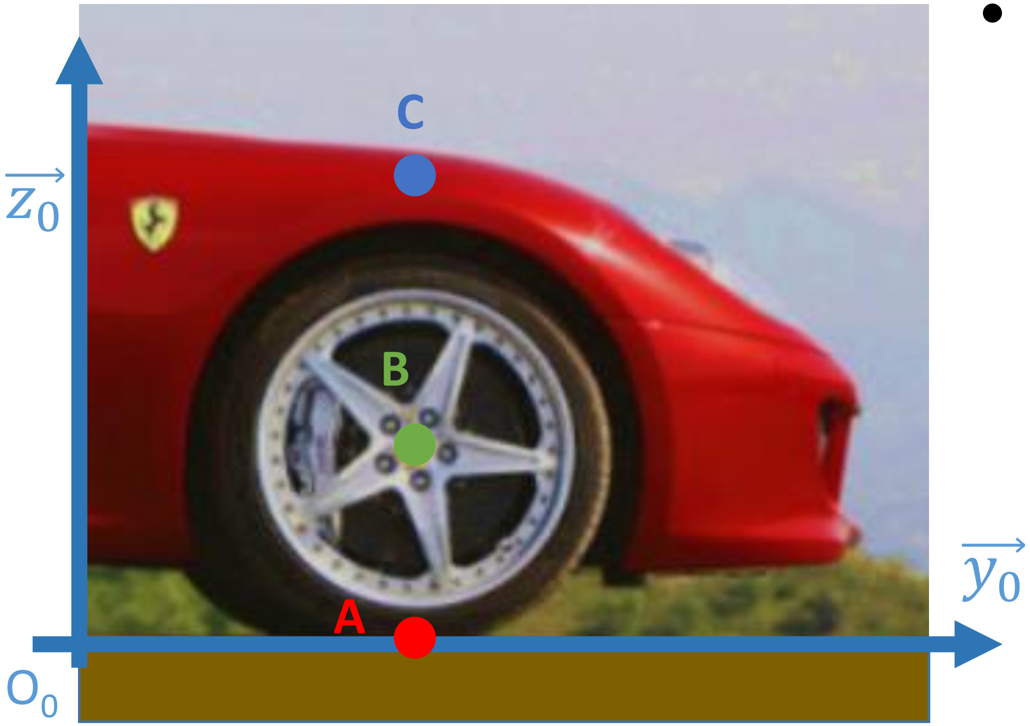




Cinématique du point

Trajectoire du point M par rapport à un repère R

- A = point de contact entre la roue (1) et le sol (0) à l'instant initial
- B = sur l'axe de la roue (1)
- C = un point de la carrosserie (2)



La carrosserie (2) de la Ferrari rouge → mouvement de translation rectiligne par rapport au sol (0), dans la direction y_0.

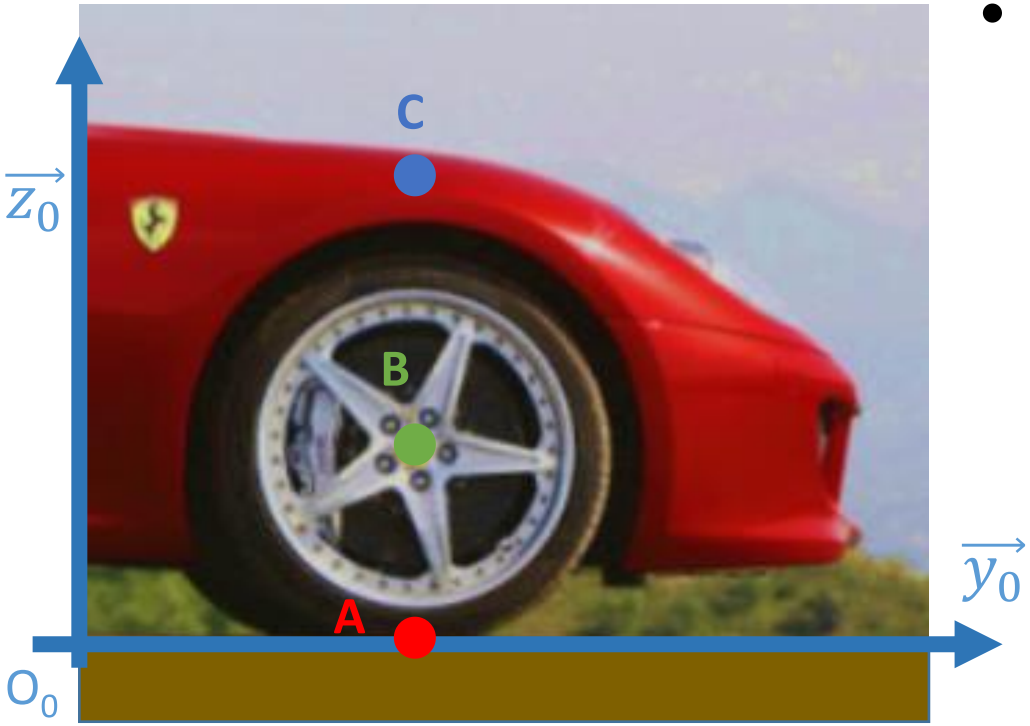
<u>Trajectoires de A, B et C :</u>

- $T_{A \in 2/0}$: segment de la droite (A, y_0)
- $T_{B \in 2/0}$: segment de la droite (B, y_0)
- $T_{C \in 2/0}$: segment de la droite (C, y_0)

Cinématique du point

Trajectoire du point M par rapport à un repère R

- A = point de contact entre la roue (1) et le sol (0) à l'instant initial
- B = sur l'axe de la roue (1)
- C = un point de la carrosserie (2)



La roue (1) de la Ferrari rouge → mouvement de rotation d'axe (B, x_0) par rapport à la carrosserie (2).

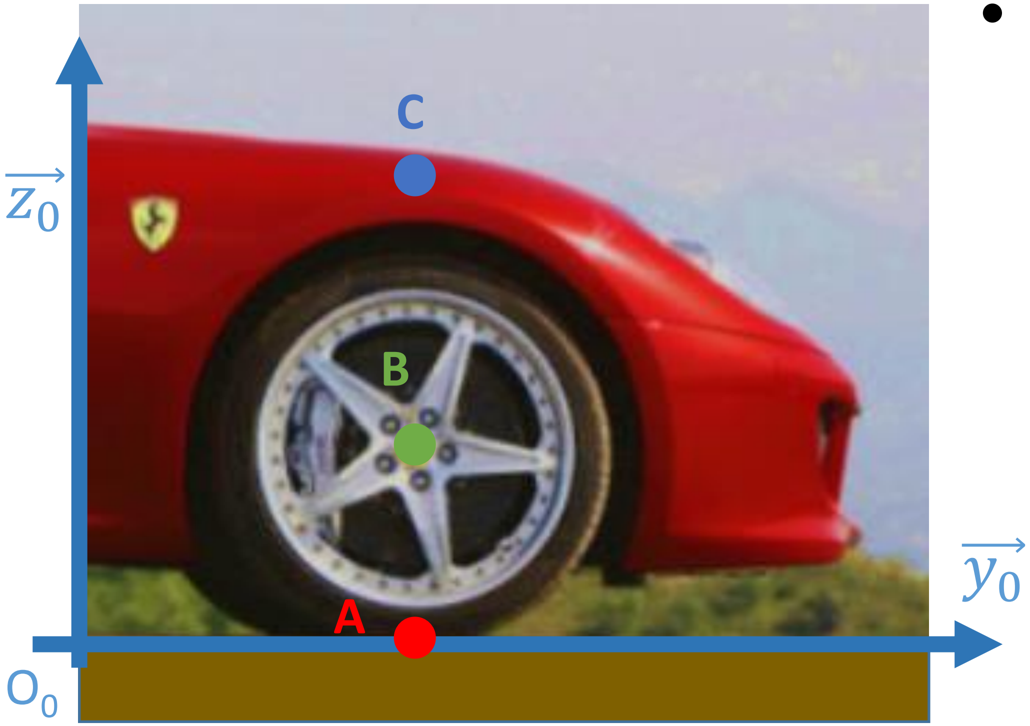
<u>Trajectoires de A et B :</u>

- $T_{A \in 1/2}$: cercle de centre B et de rayon [AB]
- $T_{B \in 1/2}$: point B

Cinématique du point

Trajectoire du point M par rapport à un repère R

- A = point de contact entre la roue (1) et le sol (0) à l'instant initial
- B = sur l'axe de la roue (1)
- C = un point de la carrosserie (2)

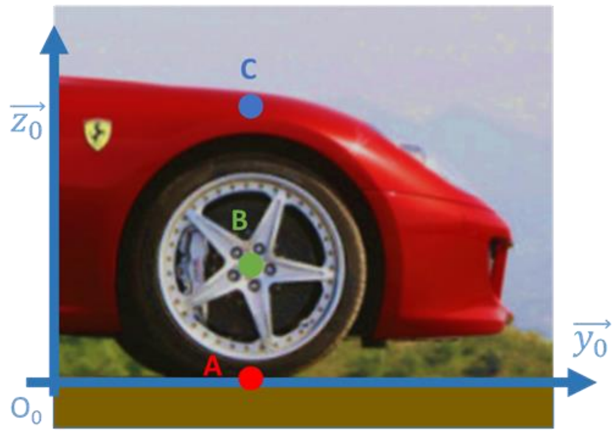


La roue (1) de la Ferrari rouge → mouvement par rapport au sol (0).

<u>Trajectoires de A et B :</u>

- $T_{A \in 1/0}$: cycloïde
- $T_{B \in 1/0}$: segment de la droite (B, y_0)

Cinématique du point



Trajectoire du point M par rapport à un repère R

Cinématique du point

Trajectoire du point M par rapport à un repère R

Position du point M par rapport à R (unité m)

Position du point M :

$$\overrightarrow{OM} = a(t).\vec{x} + b(t).\vec{y} + c(t).\vec{z} = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}_R$$

(O fixe dans R)

Cinématique du point

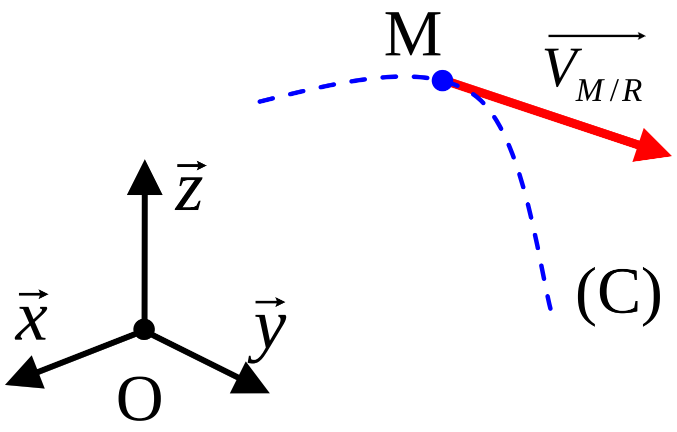
Trajectoire du point M par rapport à un repère R

Vecteur vitesse du point M par rapport au repère R (unité m/s)

Vitesse du point M par rapport au repère R → vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{M/R}}$:

$$\overrightarrow{V_{M/R}} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}\right]_R$$

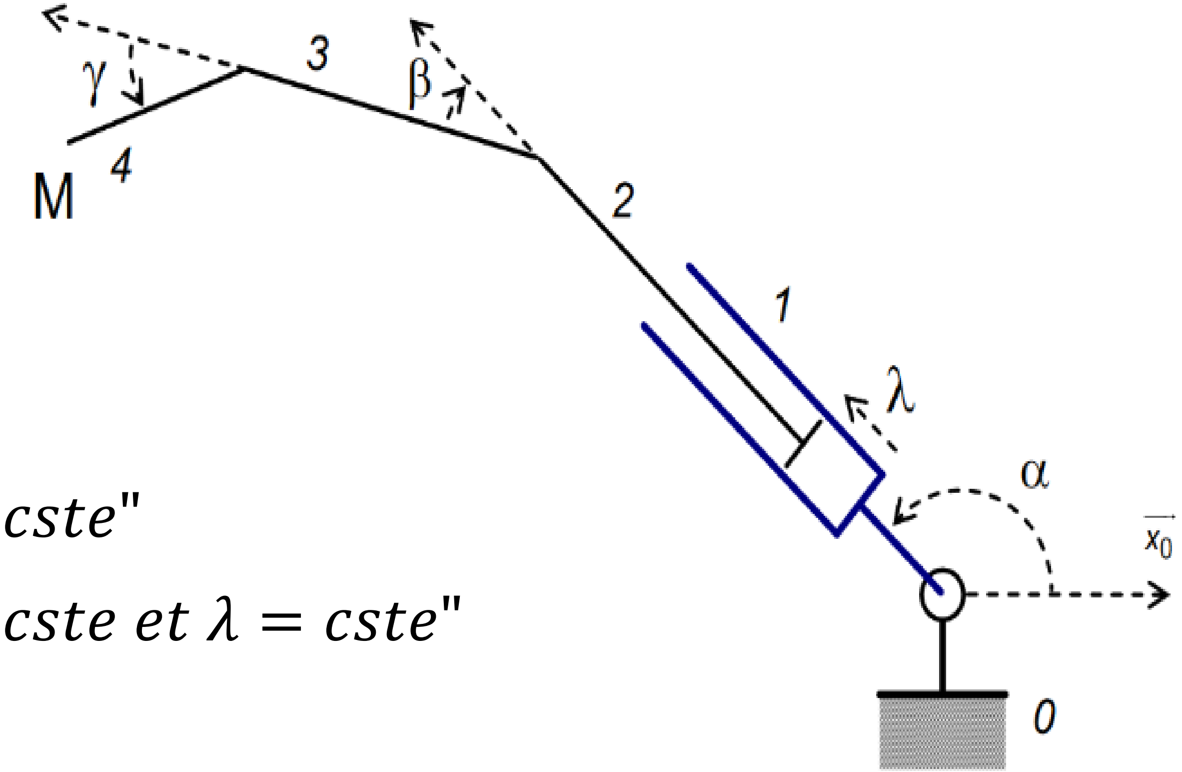
(O fixe dans R)



Propriété : Le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{M/R}}$ → tangent à la trajectoire (C) du point M par rapport à R.

Cinématique du point

Exemples de conditions d’appartenance



$$"M \in 4" \quad \leftrightarrow \quad -$$

$$"M \in 3" \quad \leftrightarrow \quad "\gamma = cste"$$

$$"M \in 2" \quad \leftrightarrow \quad "\gamma = cste \ et \ \beta = cste"$$

$$"M \in 1" \quad \leftrightarrow \quad "\gamma = cste \ et \ \beta = cste \ et \ \lambda = cste"$$

Cinématique du point

Vecteur accélération du point M par rapport au repère R (unité m/s²)

Accélération du point M par rapport au repère R : vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma_{M/R}}$:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\Gamma_{M/R}}} = \left[\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\overrightarrow{\boldsymbol{V_{M/R}}}\right]_{\boldsymbol{R}} = \left[\frac{\boldsymbol{d^2}}{\boldsymbol{dt^2}}\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}\right]_{\boldsymbol{R}}$$

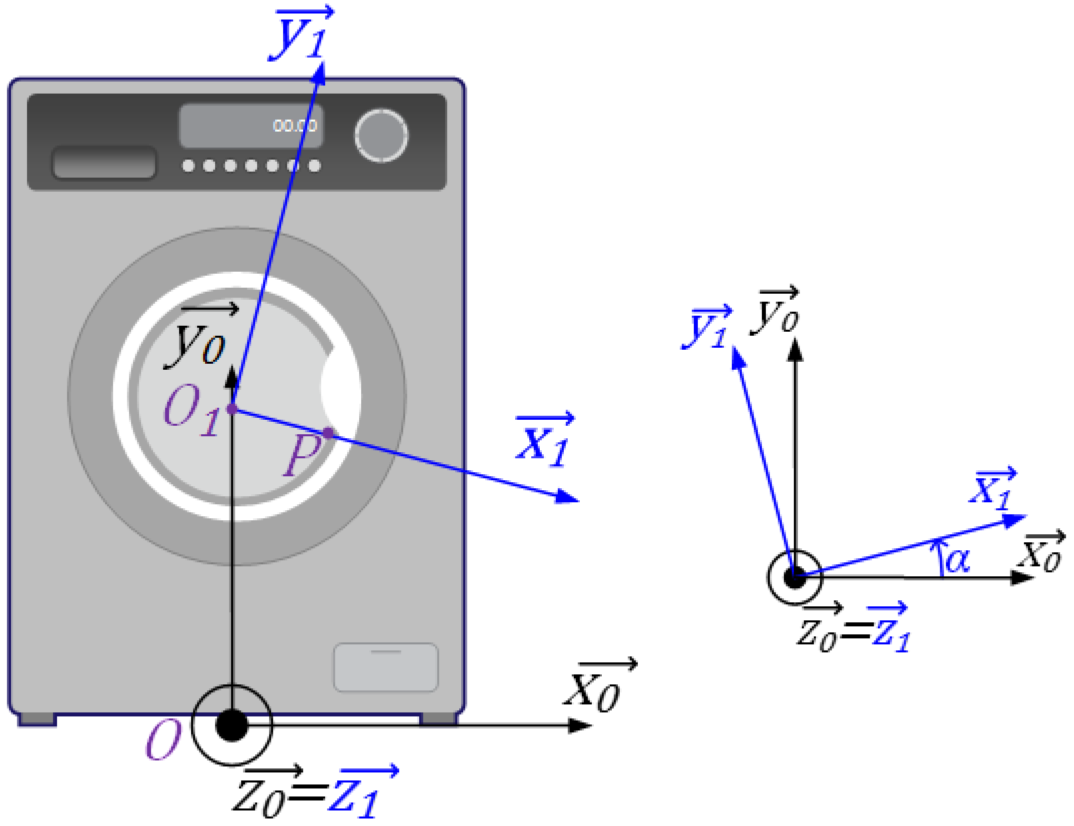
(O fixe dans R)

Cinématique du point

Exemple 1 : La machine à laver

On pose :

$$\begin{cases} \mathcal{R}_1 = (O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}) \text{ le repère associé à } S_1 \\ \alpha = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) \\ \overrightarrow{OO_1} = a.\overrightarrow{y_0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{O_1P} = R.\overrightarrow{x_1} \quad \text{avec } R \text{ et } a \text{ constantes.} \end{cases}$$

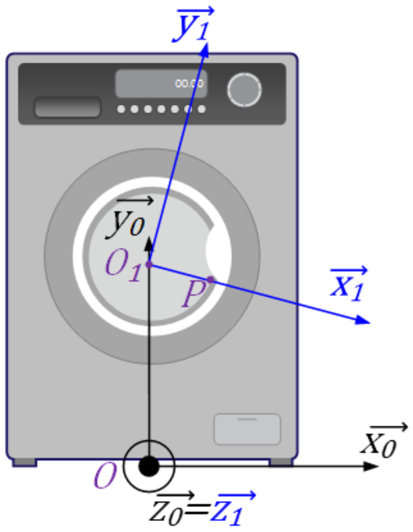


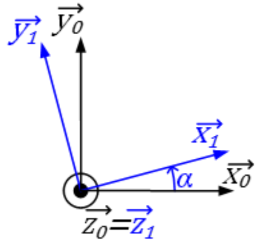
Vitesse $\overrightarrow{V(P \in S_1/\mathcal{R}_0)}$ et accélération $\overrightarrow{\Gamma(P \in S_1/\mathcal{R}_0)}$

Par définition : $\overrightarrow{V(P \in S_1/\mathcal{R}_0)} = \left.\dfrac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0}$

Cinématique du point

Exemple 1 : La machine à laver





$$\Rightarrow \overrightarrow{V(P\in S_1/\mathcal{R}_0)} = \left.\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} + \left.\frac{d\overrightarrow{O_1P}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0}$$

$$= \left.\frac{da.\vec{y_0}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} + \left.\frac{dR.\vec{x_1}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0}$$

$$= \vec{0} + \left[\left.\frac{dR.\vec{x_1}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0}}(t)\wedge R.\vec{x_1}\right] \quad \text{car } a = cste \text{ et } \vec{y_0} \text{ fixe dans } \mathcal{R}_0$$

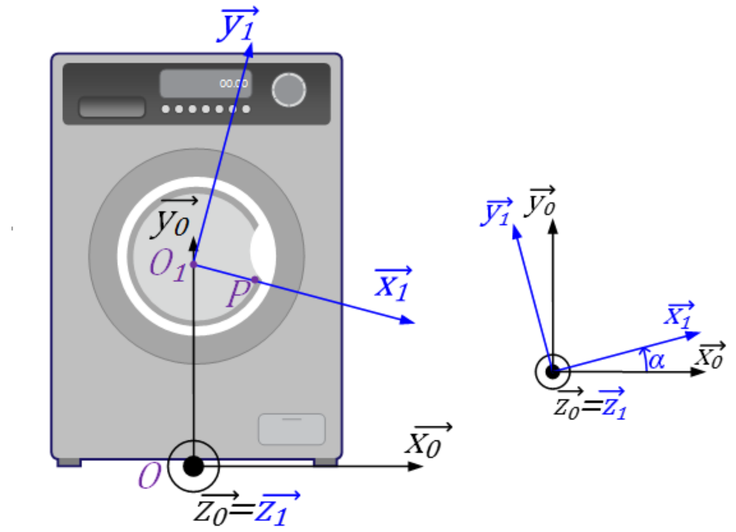
$$= \vec{0} + \left[\vec{0} + \dot{\alpha}.\vec{z_0}(t)\wedge R.\vec{x_1}\right] \quad \text{car } R = cste \text{ et } \vec{x_1} \text{ fixe dans } \mathcal{R}_1$$

Ainsi : $\boxed{\overrightarrow{V(P\in S_1/\mathcal{R}_0)} = R\dot{\alpha}.\vec{y_1}}$

AN : $\left\|\overrightarrow{V(P\in S_1/\mathcal{R}_0)}\right\| = 0{,}25.1200.\frac{2\pi}{60} = 31{,}4\ m/s$

Cinématique du point

Exemple 1 : La machine à laver



Par définition : $\overrightarrow{\Gamma(P \in S_1/\mathcal{R}_0)} = \left.\dfrac{d\overrightarrow{V(P \in S_1/\mathcal{R})}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\Gamma(P \in S_1/\mathcal{R}_0)} = \left.\frac{dR\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0}$$

$$= \left.\frac{dR\dot{\alpha}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} .\overrightarrow{y_1} + R\dot{\alpha}\left.\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0}$$

$$= R\ddot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} + R\dot{\alpha}\left[\left.\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0}}(t)_\wedge\overrightarrow{y_1}\right]$$

$$= \vec{0} + R\dot{\alpha}\left[\vec{0} + \dot{\alpha}.\overrightarrow{z_0}(t)_\wedge\overrightarrow{y_1}\right]$$

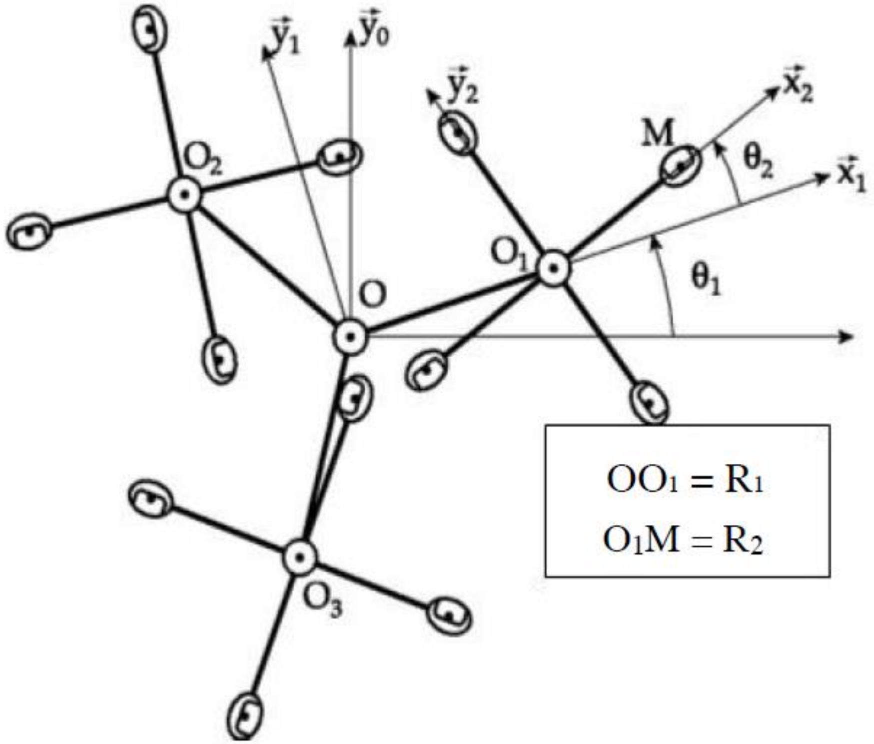
car $\dot{\alpha} = cste$ et $\overrightarrow{y_1}$ fixe dans $\mathcal{R}_1$

Ainsi : $\boxed{\overrightarrow{\Gamma(P \in S_1/\mathcal{R}_0)} = -R\dot{\alpha}^2.\overrightarrow{x_1}}$

AN : $\left\|\overrightarrow{\Gamma(P \in S_1/\mathcal{R}_0)}\right\| = 0{,}25.\left(1200.\frac{2\pi}{60}\right)^2 = 3.95.10^3\ m/s^2$

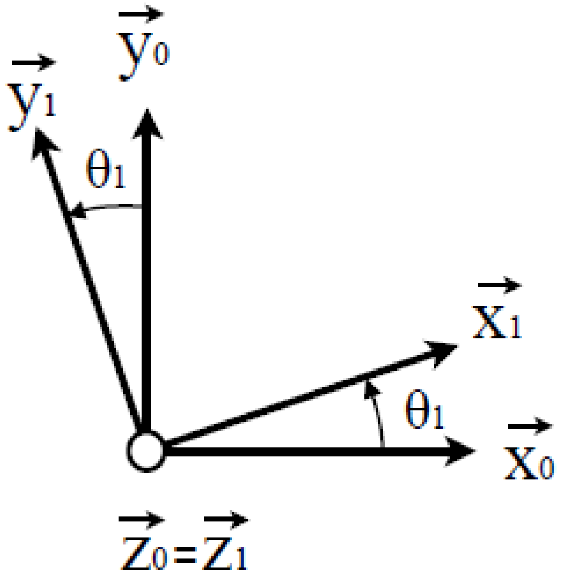
Cinématique du point

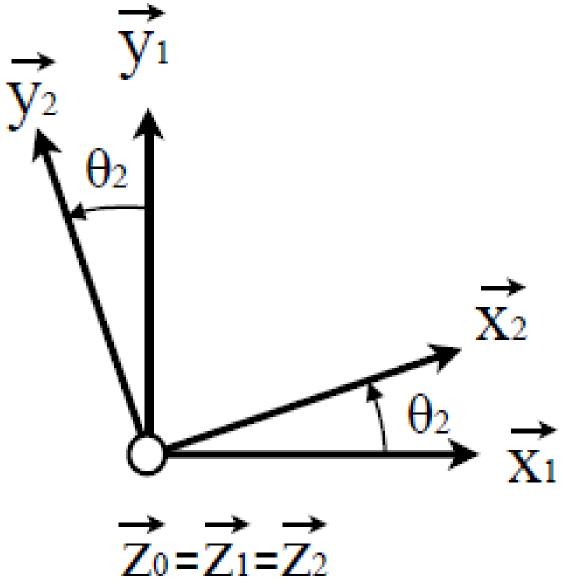
Exemple 2 : Le manège



Cinématique du point

Exemple 2 : Le manège





Cinématique du point

Exemple 2 : Le manège

- Position :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M} = R_1.\overrightarrow{x_1} + R_2.\overrightarrow{x_2}$$

- Vitesse :

$$\overrightarrow{V_{M\in 2/0}} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt}\right|_{R_0} = R_1.\left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right|_{R_0} + R_2.\left.\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right|_{R_0}$$

- Accélération :

$$\overrightarrow{\Gamma_{M\in 2/0}} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM(t)}}{dt^2}\right|_{R_0} = R_1.\left.\frac{d^2\overrightarrow{x_1}}{dt^2}\right|_{R_0} + R_2.\left.\frac{d^2\overrightarrow{x_2}}{dt^2}\right|_{R_0}$$

Cinématique du point

Exemple 2 : Le manège

Or

$$\left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right|_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{x_1} \ \ avec \ \ \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0}} = \frac{d\theta_1}{dt}.\overrightarrow{z_1}$$

Et

$$\left.\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right|_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{x_2} \ \ avec \ \ \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0}} = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2).\overrightarrow{z_1}$$

Comme

$$\left.\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right|_{R_2} = \left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right|_{R_1} = \vec{0}$$

Cinématique du point

Exemple 2 : Le manège

On obtient pour la vitesse :

$$\overrightarrow{V_{M\in 2/0}} = R_1.\left(\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{x_1}\right) + R_2.\left(\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0}} \wedge \overrightarrow{x_2}\right) = R_1.\dot{\theta}_1.\overrightarrow{y_1} + R_2.(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2).\overrightarrow{y_2}$$